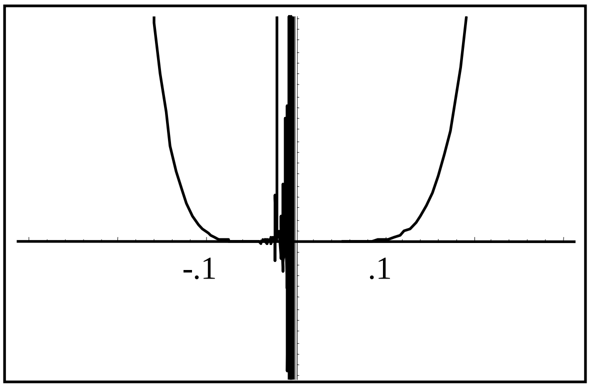


Рис. 7

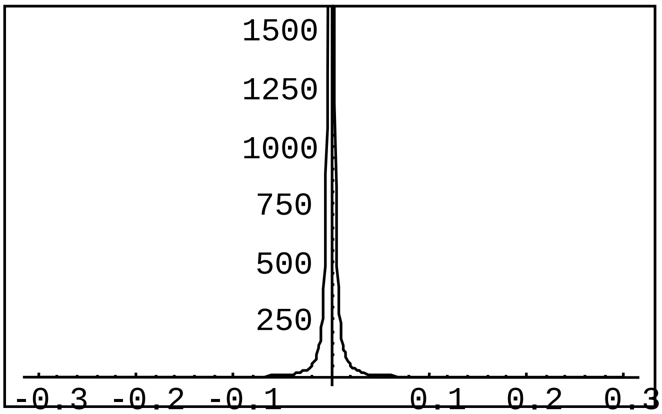


Рис. 8

Литература

1. Чичурин А. В. О решениях систем с заданными предельными свойствами у частных классов нормальных дифференциальных систем с рациональными правыми частями // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. – 1992. – №2 – С. 62-66.
2. Horn J. Uber die Reienenwichelung der Inteqrale lines Systems von Differentiagleichungen in der Umgeburg gewisser singularer stellen//J.fur M.,1896, 116, p. 265 – 306, 1897,117, p. 104 – 128.
3. Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. - Мн., БГУ, 1999. С 265.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНО СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Юхимук М.М.
Брестский государственный технический университет, г. Брест

В данной работе рассматривается некоторый класс мероморфных функций с особым расположением полюсов третьего порядка. Доказывается ограниченность этих функций вне некоторых окрестностей своих полюсов.

Теорема: Пусть $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ – монотонно неубывающая по модулю последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условию $\inf\limits_{\substack{k,j\in\mathbb{N}\\ k\neq j}}\{|\alpha_j-\alpha_k|\}>0$. Тогда $\forall\delta>0$ функция $f(z)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(z-\alpha_j)^3}$ ограничена вне δ- окрестностей точек α_j $(j\in\mathbb{N})$.

Доказательство

Будем называть последовательность комплексных чисел $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ *d* - последовательностью, если она удовлетворяет условиям:

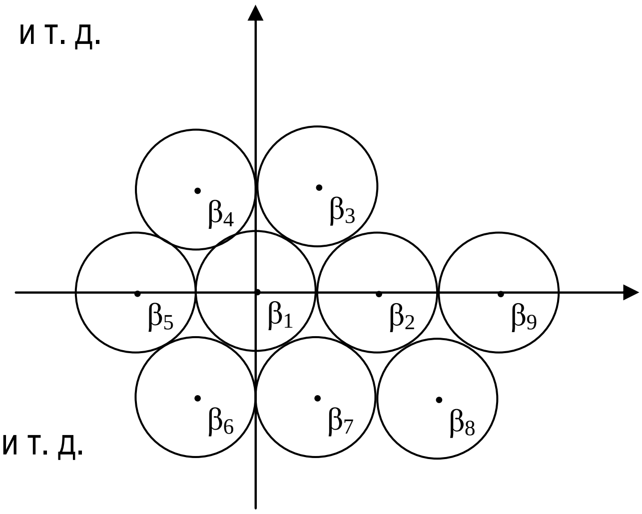
1) $|\beta_2-\beta_1|\le|\beta_3-\beta_1|\le\ldots\le|\beta_j-\beta_1|\le\ldots$; 2) $\inf\limits_{\substack{k,j\in\mathbb{N}\\ k\neq j}}\{|\beta_j-\beta_k|\}=d>0$.

При этом условимся говорить, что *d* - последовательность $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ мажорирует *d* - последовательность $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$, если $|\alpha_2-\alpha_1|\ge|\beta_2-\beta_1|$, $|\alpha_3-\alpha_1|\ge|\beta_3-\beta_1|,\ldots,|\alpha_j-\alpha_1|\ge|\beta_j-\beta_1|,\ldots$

Построим *d* - последовательность $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$, заведомо мажорируемую произвольной *d* – последовательностью $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$. Для этого, очевидно, нужно максимально "плотно" заполнить комплексную плоскость окружностями радиуса $\frac{d}{2}$, касающимися внешним образом (и тогда в качестве β_j возьмём центры этих окружностей). Все возможные разбиения плоскости одинаковыми правильными многоугольниками исчерпываются тремя случаями – разбиением правильными треугольниками, квадратами и правильными шестиугольниками. Если вписать в каждый из этих многоугольников окружность, то окажется, что отношение площади круга к площади описанного около него многоугольника будет наибольшим именно для шестиугольника. Поэтому внутри окружности достаточно большого радиуса наибольшее число окружностей радиуса $\frac{d}{2}$ будет как раз при “шестиугольном” размещении. Строим элементы последовательности $\left(\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}$ следующим образом:

$\beta_1=0$; $\beta_2=d$; $\beta_3=\frac{d}{2}+\frac{d\sqrt{3}}{2}i$; $\beta_4=-\frac{d}{2}+\frac{d\sqrt{3}}{2}i$; $\beta_5=-d$; $\beta_6=-\frac{d}{2}-\frac{d\sqrt{3}}{2}i$;

$\beta_7=\frac{d}{2}-\frac{d\sqrt{3}}{2}i$; $\beta_8=\frac{3d}{2}-\frac{d\sqrt{3}}{2}i$; $\beta_9=2d$; и т. д.



Выберем произвольную точку $z_0 \in \mathbb{C}$, удовлетворяющую условию $\min\limits_{j\in\mathbb{N}}\left\{\left| z_0-\alpha_j\right|\right\} \geq \delta$, и обозначим через α_1^* ближайший к z_0 член последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$. Через α_2^* обозначим ближайший к z_0 член последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$, отличный от α_1^*, и т. д.

Пусть *N* – наименьший из номеров членов построенной последовательности $\left(\alpha_j^*\right)_{j=1}^{\infty}$, при котором $\left|\alpha_j^*-z_0\right| \geq d$ (из геометрических соображений следует, что $1 \leq N \leq 6$). Тогда последовательность z_0, α_N^*, α_{N+1}^*, …, α_{N+j}^*, … является *d*– последовательностью и, следовательно, мажорирует последовательность $\left(\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}$, т. е. $\left|\alpha_N^*-z_0\right| \geq \left|\beta_2-\beta_1\right|=\left|\beta_2\right|$, $\left|\alpha_{N+1}^*-z_0\right| \geq \left|\beta_3-\beta_1\right|=\left|\beta_3\right|$, …, $\left|\alpha_{N+j}^*-z_0\right| \geq \left|\beta_{j+2}-\beta_1\right|=\left|\beta_{j+2}\right|$, …

Учитывая, что $\inf\limits_{\substack{k,j\in\mathbb{N}\\ k\neq j}}\left\{\left|\alpha_j^*-\alpha_k^*\right|\right\}=d>0$ и полагая $0<\delta\leq\frac{d}{2}$, при $N>1$ получим:

$\left|\alpha_1^*-z_0\right| \geq \delta$, $\left|\alpha_2^*-z_0\right| \geq \frac{d}{2}$, …, $\left|\alpha_{N-1}^*-z_0\right| \geq \frac{d}{2}$. Тогда:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left|z_0-\alpha_j^*\right|^3}=\frac{1}{\left|z_0-\alpha_1^*\right|^3}+\frac{1}{\left|z_0-\alpha_2^*\right|^3}+\ldots+\frac{1}{\left|z_0-\alpha_{N-1}^*\right|^3}+\frac{1}{\left|z_0-\alpha_N^*\right|^3}+\frac{1}{\left|z_0-\alpha_{N+1}^*\right|^3}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{\left|z_0-\alpha_j^*\right|^3}+\ldots\leq\frac{1}{\delta^3}+\frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^3}+\ldots+\frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^3}+\frac{1}{\left|\beta_2\right|^3}+\frac{1}{\left|\beta_3\right|^3}+\ldots+\frac{1}{\left|\beta_{j+2}\right|^3}+\ldots=\frac{1}{\delta^3}+\frac{8(N-2)}{d^3}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{\left|\beta_j\right|^3}$$

При $N=1$, т.е. когда числа z_0, α_1^*, α_2^*, …, α_j^*, …

уже образуют d - последовательность, в последнем выражении будут отсутствовать слагаемые перед рядом.

Числа β_j $(j\in\mathbb{N})$, очевидно, образуют двояко-периодическую структуру в комплексной плоскости. Перенумеруем члены последовательности $\left(\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}$, используя двойную индексацию:

$$\beta_{m,n}^* = \beta_2 m + \beta_3 n = dm + \left(\frac{d}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2} i\right) n = d\left(m + e^{\frac{\pi}{3} i} n\right) \quad (m,n\in\mathbb{Z}).$$

Числа $\Omega_{m,n} = m + e^{\frac{\pi}{3} i} n \quad (m,n\in\mathbb{Z})$ являются полюсами эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum\limits_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}} \left[\frac{1}{(z-\Omega_{m,n})^2} - \frac{1}{\Omega_{m,n}{}^2}\right]$, и поэтому (см. [1], [2]) ряд

$\sum\limits_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{\left|\Omega_{m,n}\right|^3}$ сходится.

Учитывая, что $1\le N\le 6$, запишем оценку, общую для всех точек $z\in\mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $\min\limits_{j\in\mathbb{N}}\left\{\left|z-\alpha_j\right|\right\}\ge\delta$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\left|z-\alpha_j^*\right|^3} < \frac{1}{\delta^3} + \frac{32}{d^3} + \frac{1}{d^3} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{\left|\Omega_{m,n}\right|^3} = \frac{1}{\delta^3} + \frac{C}{d^3},$$ где $C = 32 + \sum\limits_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{\left|\Omega_{m,n}\right|^3}$.

Так как $\left\{\alpha_j\right\}_{j\in\mathbb{N}} = \left\{\alpha_j^*\right\}_{j\in\mathbb{N}}$, то последняя оценка означает, что при $\min\limits_{j\in\mathbb{N}}\left\{\left|z-\alpha_j\right|\right\}\ge\delta$ ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(z-\alpha_j)^3}$ является абсолютно сходящимся, а определяемая этим рядом функция $f(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(z-\alpha_j)^3}$ является ограниченной вне δ - окрестностей своих полюсов. Теорема доказана.

Полученный результат позволяет (см. [3]) строить примеры краевых задач с ограниченными в некоторых бесконечно связных областях решениями.

Литература

1. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т. 2. – М.: Наука, 1967.
2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970.
3. Юхимук М.М. Задача о скачке для многосвязных и бесконечно связных областей // Веснік Брэсцкага універсітэта. 25, №1, 2006. С. 17–24.