

The mathematical model of two wheels mobile robot is developed. It is realized in Simulink and may be used for simulation of dynamic processes in robot. The program allows to research the influence of robot parameters on its movement performances. The results may be utilized in production of robots with similar construction for adjustment of the control system.

УДК 629.113

Волощук А.А., Ким В.А., Монтик С.В., Березуцкая С.О.

УРАВНЕНИЯ ТОРМОЖЕНИЯ ТРАКТОРНОГО ПОЕЗДА В СОСТАВЕ КОЛЕСНОГО ТРАКТОРА И ПРИЦЕПА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Введение. Основной задачей промышленности Республики Беларусь при создании автомобильной техники было и всегда будет повышение безопасности колёсных машин.

О безопасности автомобиля на дороге можно судить по величине его тормозного пути, который во многом зависит от эффективности тормозной системы – колёсного тормоза.

Правила ЕЭК ООН №13 [1] предъявляют требования к рабочей тормозной системе такие, чтобы она воздействовала на все колеса транспортного средства.

На сегодняшний день у серийного трактора рабочая тормозная система воздействует только на задние колёса. У трактора с передним ведущим мостом (ПВМ) торможение передних колёс происходит за счёт кинематической связи трансмиссии с задними колёсами. Если трактор без ПВМ, то передние колёса и вовсе не участвуют в торможении. Возникает проблема создания тормозных механизмов передних колёс трактора, и поэтому она должна быть решена [2].

Проектирование колёсного тормоза всегда начинается с определения нагрузки, которую несет на себе передний мост трактора.

Рассмотрим процесс торможения тракторного поезда в составе колесного трактора и прицепа (прицеп не оснащен колесными тормозными механизмами). Для составления дифференциальных уравнений торможения тракторного поезда в составе колес-

ного трактора и прицепа по горизонтальной опорной поверхности рассмотрим расчетную схему [3], представленную на рисунке 1.

В приведенной на рисунке 1 расчетной схеме дышло закреплено к платформе прицепа шарнирно и его угол поворота относительно собственной оси представляет собой обобщенную координату φ_D .

Для определения местоположения масс тракторного поезда на горизонтальной опорной поверхности вводим следующие обобщенные координаты (рисунок 1): X_{CT} – линейная координата горизонтального перемещения центра масс трактора по продольной оси; Z_{CT} – линейная координата вертикального перемещения центра масс трактора; Z_{1T} – линейная координата вертикального перемещения центра масс передних колёс трактора; $Z_{1П}$ – линейная координата вертикального перемещения центра масс передних колёс прицепа; $Z_{2П}$ – линейная координата вертикального перемещения центра масс задних колёс прицепа; φ_T – угловая координата поворота корпуса трактора вокруг его поперечной оси; φ_d – угловая координата поворота дышла прицепа вокруг поперечной оси, проходящей через точки крепления его к прицепу; $\varphi_{П}$ – угловая координата

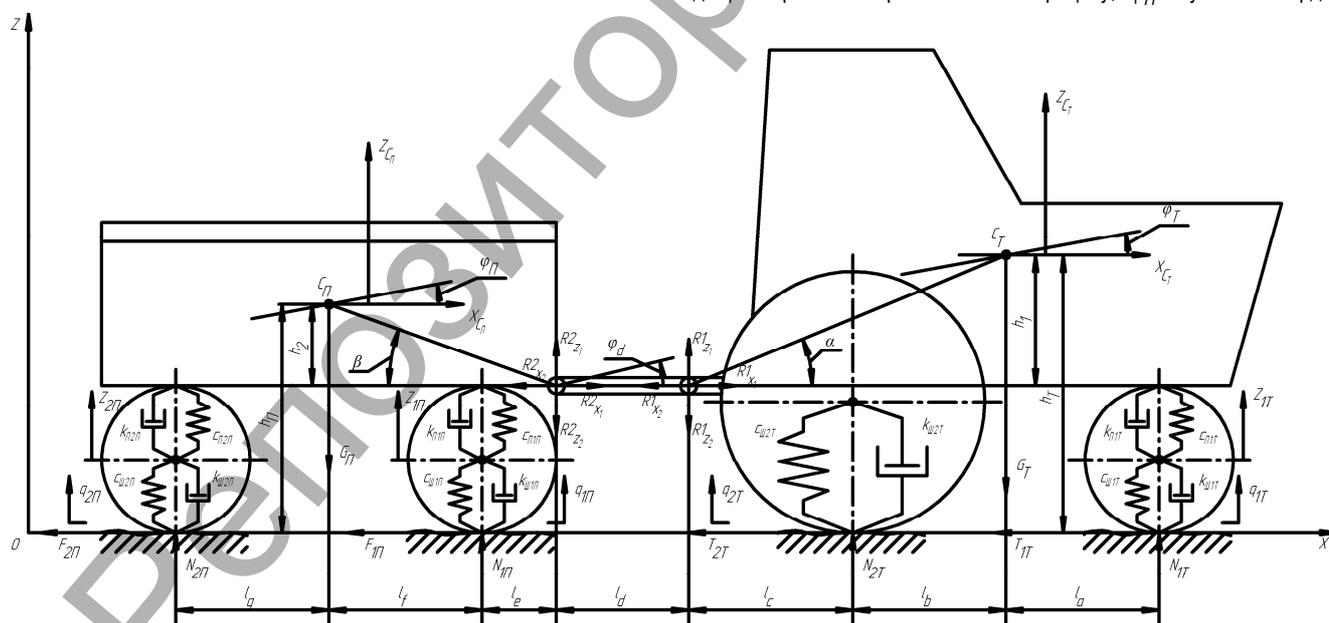


Рисунок 1 – Расчетная схема тракторного поезда

Волощук Антон Анатольевич, исследователь в области технических наук, старший преподаватель кафедры машиностроения и эксплуатации автомобилей Брестского государственного технического университета.

Монтик Сергей Владимирович, к.т.н., доцент, заведующий кафедрой машиностроения и эксплуатации автомобилей Брестского государственного технического университета.

Березуцкая Светлана Олеговна, м.т.н., ассистент кафедры машиностроения и эксплуатации автомобилей Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Ким Валерий Андреевич, д.т.н., профессор кафедры технической эксплуатации автомобилей Белорусско-Российского университета.

Беларусь, 212000, г. Могилев, пр-т Мира, 43.

ната поворота корпуса прицепа вокруг его поперечной оси; φ_{1T} – угловая координата поворота передних колёс трактора вокруг их собственных осей вращения; φ_{2T} – угловая координата поворота задних колёс трактора вокруг их собственных осей вращения; $\varphi_{1П}$ – угловая координата поворота передних колёс прицепа вокруг их собственных осей вращения; $\varphi_{2П}$ – угловая координата поворота передних колёс прицепа вокруг их собственных осей вращения.

Ординаты неровностей микропрофиля опорной поверхности обозначим переменными: q_{1T} – ордината неровности моделируемого случайного микропрофиля под колёсами переднего моста трактора; q_{2T} – ордината неровности моделируемого случайного микропрофиля под колёсами заднего моста трактора; $q_{1П}$ – ордината неровности моделируемого случайного микропрофиля под колёсами передней оси прицепа; $q_{2П}$ – ордината неровности моделируемого случайного микропрофиля под колёсами задней оси прицепа.

Введем обозначения массогеометрических параметров рассматриваемой механической системы: m_T – поддрессоренная масса трактора; m_{1T} – масса передних колёс трактора; $m_{П}$ – поддрессоренная масса прицепа; $m_{1П}$ – масса передних колёс прицепа; $m_{2П}$ – масса задних колёс прицепа; S_T – момент инерции корпуса трактора относительно его поперечной оси; S_{1T} – момент инерции передних колёс трактора относительно их собственных осей вращения; S_{2T} – момент инерции задних колёс трактора относительно их собственных осей вращения; S_d – момент инерции дышла прицепа относительно его оси поворота; $S_{П}$ – момент инерции прицепа относительно его поперечной оси; $S_{1П}$ – момент инерции передних колёс прицепа относительно их собственных осей вращения; $S_{2П}$ – момент инерции задних колёс прицепа относительно их собственных осей вращения; l_a – расстояние от центра масс корпуса трактора до его передней оси; l_b – расстояние от центра масс корпуса трактора до его заднего моста; l_c – расстояние от заднего моста трактора до оси сцепки; l_d – длина дышла прицепа; l_e – расстояние от передней оси прицепа до оси закрепления дышла; l_f – расстояние от центра масс прицепа до его передней оси; l_g – расстояние от центра масс прицепа до его задней оси; h_T – расстояние от опорной поверхности до центра масс трактора; $h_{П}$ – расстояние от опорной поверхности до центра масс прицепа; h_1 – расстояние от оси сцепки до центра масс трактора; h_2 – расстояние от оси закрепления дышла до центра масс прицепа.

Введем следующие обозначения упругих и диссипативных характеристик подвесок, и шин тракторного поезда: $c_{П1T}$ – жесткость передней подвески трактора; $c_{Ш1T}$ – жесткость шин колёс передней оси трактора; $c_{Ш2T}$ – жесткость шин колёс заднего моста трактора; $c_{Ш1П}$ – жесткость шин колёс передней оси прицепа; $c_{Ш2П}$ – жесткость шин колёс задней оси прицепа; $c_{П1П}$ – жесткость передней подвески прицепа; $c_{П1П}$ – жесткость задней подвески прицепа; $k_{П1T}$ – коэффициент вязкого сопротивления передней подвески трактора; $k_{Ш1T}$ – коэффициент вязкого сопротивления шин колёс передней оси трактора; $k_{Ш2T}$ – коэффициент вязкого сопротивления шин колёс заднего моста трактора; $k_{Ш1П}$ – коэффициент вязкого

сопротивления шин колёс передней оси прицепа; $k_{Ш2П}$ – коэффициент вязкого сопротивления шин колёс задней оси прицепа; $k_{П1П}$ – коэффициент вязкого сопротивления передней подвески прицепа; $k_{П2П}$ – коэффициент вязкого сопротивления задней подвески прицепа.

За положительное направление линейных обобщенных координат примем направление координатных осей, а угловых – направление против часовой стрелки (см. рисунок 1).

$$\text{Угол } \alpha = \arctg\left(\frac{h_1}{l_b + l_c}\right), \beta = \arctg\left(\frac{h_2}{l_e + l_f}\right).$$

Введем следующие обозначения: $l_1 = \sqrt{(l_b + l_c)^2 + h_1^2}$; $l_2 = \sqrt{(l_e + l_f)^2 + h_2^2}$.

Запишем геометрические соотношения некоторых параметров тракторного поезда. Координаты $x_{C_{П}}$ горизонтального и $z_{C_{П}}$ вертикального перемещений центра масс прицепа по продольной и вертикальной осям имеет кинематическую связь с координатами корпуса трактора и определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_{C_{П}} &= x_{C_T} - l_1 \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) - l_d \cdot \cos \varphi_d - l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_{П}); \\ z_{C_{П}} &= z_{C_T} - l_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) - l_d \cdot \sin \varphi_d + l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_{П}). \end{aligned} \right\} (1)$$

Продифференцируем уравнения (1) по времени и определим скорость поступательного перемещения прицепа по продольной и вертикальным осям:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{C_{П}} &= \dot{x}_{C_T} + \dot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) + \dot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \sin \varphi_d - \dot{\varphi}_{П} \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_{П}); \\ \dot{z}_{C_{П}} &= \dot{z}_{C_T} - \dot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) - \dot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \cos \varphi_d - \dot{\varphi}_{П} \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_{П}). \end{aligned} \right\} (2)$$

Дифференциальные уравнения движения представим в соответствии с математической схемой Лагранжа II-го рода [4]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad (3)$$

где T , Π , D – соответственно кинетическая и потенциальная энергия системы, и диссипативная функция (функция рассеивания); Q_i – внешняя сила, действующая вдоль координаты q_i .

Полная кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (m_i \cdot \dot{x}_i^2) + \sum_{j=1}^k (S_j \cdot \dot{\varphi}_j^2) \right), \quad (4)$$

где m_i – масса i -го звена, кг; \dot{x}_i – линейная скорость i -го звена, м/с; S_j – момент инерции j -го звена, кг·м²; $\dot{\varphi}_j$ – угловая скорость j -го звена, об./мин¹.

Потенциальная энергия, понимаемая как приращение при перемещении масс:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (c_i \cdot \Delta_i^2) + \sum_{j=1}^k (k_j \cdot \varepsilon_j^2) \right), \quad (5)$$

где c_i , k_j – линейные и угловые жесткости упругих звеньев, под которой понимают отношение изменения силы (момента), приложенной к звену, к его деформации; Δ_i , ε_j – линейные и угловые деформации.

Диссипативная функция:

$$D = \sum_{i=1}^n \int F_i d(\dot{q}_i), \quad (6)$$

где F_i – сила трения, Н; \dot{q}_i – скорость деформации, м/с.

С учетом того, что $F_i = k_i \cdot \dot{q}_i$ и $k_i = const$, то формула (2.6) примет следующий вид:

$$D = \frac{1}{2} k_i \cdot (\dot{q}_i)^2. \quad (7)$$

где k_i – коэффициент демпфирования; \dot{q}_i – скорость деформации, м/с.

Для рассматриваемой механической системы определим кинетическую энергию T :

$$T = \frac{1}{2} (m_T \cdot \dot{x}_{C_T}^2 + m_T \cdot \dot{z}_{C_T}^2 + m_{1T} \cdot \dot{z}_{1T}^2 + m_n \cdot \dot{x}_{C_n}^2 + m_n \cdot \dot{z}_{C_n}^2 + m_{1n} \cdot \dot{z}_{1n}^2 + m_{2n} \cdot \dot{z}_{2n}^2 + \mathfrak{S}_T \cdot \dot{\varphi}_T^2 + \mathfrak{S}_d \cdot \dot{\varphi}_d^2 + \mathfrak{S}_n \cdot \dot{\varphi}_n^2 + \mathfrak{S}_{1T} \cdot \dot{\varphi}_{1T}^2 + \mathfrak{S}_{2T} \cdot \dot{\varphi}_{2T}^2 + \mathfrak{S}_{1n} \cdot \dot{\varphi}_{1n}^2 + \mathfrak{S}_{2n} \cdot \dot{\varphi}_{2n}^2). \quad (8)$$

С учетом уравнения (2.2) кинетическая энергия согласно (2.8) примет следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} (m_T \cdot \dot{x}_{C_T}^2 + m_T \cdot \dot{z}_{C_T}^2 + m_{1T} \cdot \dot{z}_{1T}^2 + m_n \cdot (\dot{x}_{C_n} + \dot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) + \dot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \sin \varphi_d - \dot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_n))^2 + m_n \cdot (\dot{z}_{C_n} - \dot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) - \dot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \cos \varphi_d - \dot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n))^2 + m_{1n} \cdot \dot{z}_{1n}^2 + m_{2n} \cdot \dot{z}_{2n}^2 + \mathfrak{S}_T \cdot \dot{\varphi}_T^2 + \mathfrak{S}_d \cdot \dot{\varphi}_d^2 + \mathfrak{S}_n \cdot \dot{\varphi}_n^2 + \mathfrak{S}_{1T} \cdot \dot{\varphi}_{1T}^2 + \mathfrak{S}_{2T} \cdot \dot{\varphi}_{2T}^2 + \mathfrak{S}_{1n} \cdot \dot{\varphi}_{1n}^2 + \mathfrak{S}_{2n} \cdot \dot{\varphi}_{2n}^2). \quad (9)$$

Для рассматриваемой механической системы определим потенциальную энергию Π :

$$\Pi = \frac{1}{2} [c_{11T} \cdot (z_{1T} - l_a \cdot \sin \varphi_T - z_{C_T})^2 + c_{11n} \cdot (q_{1T} - z_{1T})^2 + c_{12T} \cdot (q_{2T} + l_b \cdot \sin \varphi_T - z_{C_T})^2 + c_{12n} \cdot (z_{1n} - l_f \cdot \sin \varphi_n - z_{C_n})^2 + c_{13T} \cdot (q_{1T} - z_{1n})^2 + c_{13n} \cdot (z_{2n} + l_g \cdot \sin \varphi_n - z_{C_n})^2 + c_{14T} \cdot (q_{2n} - z_{2n})^2]. \quad (10)$$

Составим выражение диссипативной функции рассматриваемой механической системы D :

$$D = \frac{1}{2} [k_{11T} \cdot (\dot{z}_{1T} - \dot{\varphi}_T \cdot l_a \cdot \cos \varphi_T - \dot{z}_{C_T})^2 + k_{11n} \cdot (\dot{q}_{1T} - \dot{z}_{1T})^2 + k_{12T} \cdot (\dot{q}_{2T} + \dot{\varphi}_T \cdot l_b \cdot \cos \varphi_T - \dot{z}_{C_T})^2 + k_{12n} \cdot (\dot{z}_{1n} - \dot{\varphi}_n \cdot l_f \cdot \cos \varphi_n - \dot{z}_{C_n})^2 + k_{13T} \cdot (\dot{q}_{1T} - \dot{z}_{1n})^2 + k_{13n} \cdot (\dot{z}_{2n} + \dot{\varphi}_n \cdot l_g \cdot \cos \varphi_n - \dot{z}_{C_n})^2 + k_{14T} \cdot (\dot{q}_{2n} - \dot{z}_{2n})^2]. \quad (11)$$

Теперь перейдем к определению компонентов уравнения Лагранжа II рода по соответствующим обобщенным координатам и начнем с составления дифференциальных уравнений движения тракторного поезда.

Для этого возьмем частные производные от выражений кинетической энергии по обобщенным скорости \dot{x}_{C_T} и координате x_{C_T} :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{C_T}} = m_T \cdot \dot{x}_{C_T} + m_n \cdot [\dot{x}_{C_T} + \dot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) + \dot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \sin \varphi_d - \dot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_n)];$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_{C_T}} = 0.$$

Тогда функция Лагранжа по координате x_{C_T} примет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{C_T}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_{C_T}} = m_T \cdot \ddot{x}_{C_T} + m_n \cdot [\ddot{x}_{C_T} + \ddot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) +$$

$$+ \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \sin \varphi_d + \ddot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n) - \ddot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_n) + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n)].$$

Аналогично запишем функции Лагранжа по обобщенным координатам:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{C_T}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_{C_T}} = m_T \cdot \ddot{z}_{C_T} + m_n \cdot [\ddot{z}_{C_T} - \ddot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \cos \varphi_d + \ddot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) - \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \cos \varphi_d + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_n) - \ddot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n) - \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_n)];$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{1T}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_{1T}} = m_{1T} \cdot \ddot{z}_{1T};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{1n}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_{1n}} = m_{1n} \cdot \ddot{z}_{1n};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{2n}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_{2n}} = m_{2n} \cdot \ddot{z}_{2n};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_T} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_T} = \mathfrak{S}_T \cdot \ddot{\varphi}_T + m_n \cdot l_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) \cdot (\ddot{x}_{C_T} + \ddot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_1 \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \sin \varphi_d + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n) - \ddot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_n) + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n)) - m_n \cdot l_1 \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) \times (\ddot{z}_{C_T} - \ddot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) - \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \cos \varphi_d + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) - \ddot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n) - \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_n));$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_d} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_d} = \mathfrak{S}_d \cdot \ddot{\varphi}_d + m_n \cdot l_d \cdot \sin \varphi_d \cdot (\ddot{x}_{C_T} + \ddot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_1 \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \sin \varphi_d + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n) - \ddot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_n) + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n)) - m_n \cdot l_d \cdot \cos \varphi_d \cdot (\ddot{z}_{C_T} - \ddot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) - \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \cos \varphi_d + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) - \ddot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n) - \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_n));$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_n} = \mathfrak{S}_n \cdot \ddot{\varphi}_n - m_n \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_n) \cdot (\ddot{x}_{C_T} + \ddot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_1 \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \sin \varphi_d + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n) - \ddot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_n) + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n)) - m_n \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n) \times (\ddot{z}_{C_T} - \ddot{\varphi}_T \cdot l_1 \cdot \cos(\alpha + \varphi_T) + \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) - \ddot{\varphi}_d \cdot l_d \cdot \cos \varphi_d + \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_1 \cdot \sin(\alpha + \varphi_T) - \ddot{\varphi}_n \cdot l_2 \cdot \cos(\beta - \varphi_n) - \ddot{\varphi}_n^2 \cdot l_2 \cdot \sin(\beta - \varphi_n));$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{1T}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{1T}} = \mathfrak{S}_{1T} \cdot \ddot{\varphi}_{1T};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{2T}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{2T}} = \mathfrak{S}_{2T} \cdot \ddot{\varphi}_{2T};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{1П}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{1П}} = \mathfrak{S}_{1П} \cdot \ddot{\varphi}_{1П};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{2П}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{2П}} = \mathfrak{S}_{2П} \cdot \ddot{\varphi}_{2П}.$$

Ниже запишем частные производные от выражения потенциальной энергии по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_{C_T}} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z_{C_T}} = -c_{П1T} \cdot (z_{1T} - l_a \cdot \sin \varphi_T - z_{C_T}) - c_{Ш2T} \cdot (q_{2T} + l_b \cdot \sin \varphi_T - z_{C_T});$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z_{1T}} = c_{П1T} \cdot (z_{1T} - l_a \cdot \sin \varphi_T - z_{C_T}) - c_{Ш1T} \cdot (q_{1T} - z_{1T});$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z_{1П}} = c_{П1П} \cdot (z_{1П} - l_f \cdot \sin \varphi_{П} - z_{C_{П}}) - c_{Ш1П} \cdot (q_{1П} - z_{1П});$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z_{2П}} = c_{П2П} \cdot (z_{2П} + l_g \cdot \sin \varphi_{П} - z_{C_{П}}) - c_{Ш2П} \cdot (q_{2П} - z_{2П});$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_T} = -c_{П1T} \cdot l_a \cdot \cos \varphi_T \cdot (z_{1T} - l_a \cdot \sin \varphi_T - z_{C_T}) +$$

$$+ c_{Ш2T} \cdot l_b \cdot \cos \varphi_T \cdot (q_{2T} + l_b \cdot \sin \varphi_T - z_{C_T});$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_D} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{П}} = -c_{П1П} \cdot l_e \cdot \cos \varphi_{П} \cdot (z_{1П} - l_f \cdot \sin \varphi_{П} - z_{C_{П}}) +$$

$$+ c_{П2П} \cdot l_f \cdot \cos \varphi_{П} \cdot (z_{2П} + l_g \cdot \sin \varphi_{П} - z_{C_{П}});$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{1T}} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{2T}} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{1П}} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{2П}} = 0.$$

Частные производные от выражения диссипативной функции по обобщенным координатам имеют вид:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_{C_T}} = 0;$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{z}_{C_T}} = -k_{П1T} \cdot (\dot{z}_{1T} - \dot{\varphi}_T \cdot l_a \cdot \cos \varphi_T - \dot{z}_{C_T}) -$$

$$- k_{Ш2T} \cdot (\dot{q}_{2T} + \dot{\varphi}_T \cdot l_b \cdot \cos \varphi_T - \dot{z}_{C_T});$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{z}_{1T}} = k_{П1T} \cdot (\dot{z}_{1T} - \dot{\varphi}_T \cdot l_a \cdot \cos \varphi_T - \dot{z}_{C_T}) - k_{Ш1T} \cdot (\dot{q}_{1T} - \dot{z}_{1T});$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{z}_{1П}} = k_{П1П} \cdot (\dot{z}_{1П} - \dot{\varphi}_{П} \cdot l_f \cdot \cos \varphi_{П} - \dot{z}_{C_{П}}) - k_{Ш1П} \cdot (\dot{q}_{1П} - \dot{z}_{1П});$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{z}_{2П}} = k_{П2П} \cdot (\dot{z}_{2П} + \dot{\varphi}_{П} \cdot l_g \cdot \cos \varphi_{П} - \dot{z}_{C_{П}}) - k_{Ш2П} \cdot (\dot{q}_{2П} - \dot{z}_{2П});$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_T} = -k_{П1T} \cdot l_a \cdot \cos \varphi_T \cdot (\dot{z}_{1T} - \dot{\varphi}_T \cdot l_a \cdot \cos \varphi_T - \dot{z}_{C_T}) +$$

$$+ k_{Ш2T} \cdot l_b \cdot \cos \varphi_T \cdot (\dot{q}_{2T} + \dot{\varphi}_T \cdot l_b \cdot \cos \varphi_T - \dot{z}_{C_T});$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_D} = 0;$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_{П}} = -k_{П1П} \cdot l_e \cdot \cos \varphi_{П} \cdot (\dot{z}_{1П} - \dot{\varphi}_{П} \cdot l_f \cdot \cos \varphi_{П} - \dot{z}_{C_{П}}) +$$

$$+ k_{П2П} \cdot l_f \cdot \cos \varphi_{П} \cdot (\dot{z}_{2П} + \dot{\varphi}_{П} \cdot l_g \cdot \cos \varphi_{П} - \dot{z}_{C_{П}});$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_{1T}} = 0;$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_{2T}} = 0;$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_{1П}} = 0;$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_{2П}} = 0.$$

Теперь запишем выражения обобщенных сил по обобщенным координатам:

- по координате x_{C_T} :

$$Q_{x_{C_T}} = -(T_{1T} + T_{2T}),$$

где T_{1T} – тормозная сила, развиваемая колёсами передней оси трактора, Н; T_{2T} – тормозная сила, развиваемая колёсами задней оси трактора, Н.

Определим тормозные силы, действующие на трактор в составе тракторного поезда при торможении:

$$T_{1T} = [N_{1T} + c_{Ш1T} \cdot (q_{1T} - z_{1T}) + k_{Ш1T} \cdot (\dot{q}_{1T} - \dot{z}_{1T})] \cdot \varphi_{СЦ1T};$$

$$T_{2T} = [N_{2T} + c_{Ш2T} \cdot (q_{2T} + l_b \sin \varphi_T - z_{1T}) + k_{Ш2T} \cdot (\dot{q}_{2T} + \dot{\varphi}_T \cdot l_b \cdot \cos \varphi_T - \dot{z}_{C_T})] \cdot \varphi_{СЦ2T},$$

где N_{1T} – реакция опорной поверхности на передние колёса трактора в положении статического равновесия, Н; N_{2T} – реакция опорной поверхности на задние колёса трактора в положении статического равновесия, Н; $\varphi_{СЦ1T}$ – коэффициент сцепления передних колёс трактора с опорной поверхностью; $\varphi_{СЦ2T}$ – коэффициент сцепления задних колёс трактора с опорной поверхностью.

Определим реакции опорных поверхностей на колёса трактора в положении статического равновесия:

$$N_{1T} = \frac{G_T \cdot l_b}{l_a + l_b};$$

$$N_{2T} = \frac{G_T \cdot l_a}{l_a + l_b},$$

где G_T – вес трактора, Н.

С учетом вышесказанного запишем выражение для определения $Q_{x_{C_T}}$:

$$Q_{x_{C_T}} = - \left(\left[\frac{G_T \cdot l_b}{l_a + l_b} + c_{Ш1T} \cdot (q_{1T} - z_{1T}) + k_{Ш1T} \cdot (\dot{q}_{1T} - \dot{z}_{1T}) \right] \cdot \varphi_{СЦ1T} + \right.$$

$$+ \left[\frac{G_T \cdot l_a}{l_a + l_b} + c_{ш2T} \cdot (q_{2T} + l_b \cdot \sin \varphi_T - z_{1T}) + k_{ш2T} \cdot (\dot{q}_{2T} + \dot{\varphi}_T \cdot l_b \cdot \cos \varphi_T - \dot{z}_{C_T}) \right] \cdot \varphi_{сц_{2T}};$$

– по координате z_{C_T} :

$$Q_{z_{C_T}} = 0;$$

– по координате z_{1T} :

$$Q_{z_{1T}} = 0;$$

– по координате $z_{C_{п}}$:

$$Q_{z_{C_{п}}} = 0;$$

– по координате $z_{1п}$:

$$Q_{z_{1п}} = 0;$$

– по координате $z_{2п}$:

$$Q_{z_{2п}} = 0;$$

– по координате φ_T :

$$Q_{\varphi_T} = \sum_{i=1}^n M_{TK}(T_{iT}) = (T_{1T} + T_{2T}) \cdot h_T = - \left[\left(\frac{G_T \cdot l_b}{l_a + l_b} + c_{ш1T} \cdot (q_{1T} - z_{1T}) + k_{ш1T} \cdot (\dot{q}_{1T} - \dot{z}_{1T}) \right) \cdot \varphi_{сц_{1T}} + \left(\frac{G_T \cdot l_a}{l_a + l_b} + c_{ш2T} \cdot (q_{2T} + l_b \cdot \sin \varphi_T - z_{1T}) + k_{ш2T} \cdot (\dot{q}_{2T} + \dot{\varphi}_T \cdot l_b \cdot \cos \varphi_T - \dot{z}_{C_T}) \right) \cdot \varphi_{сц_{2T}} \right] \cdot h_T,$$

где $M_{TK}(T_{iT})$ – суммарный тормозной момент, развиваемый колёсами трактора, Н·м; h_T – расстояние от опорной поверхности до центра тяжести трактора, м.

– по координате φ_D :

$$Q_{\varphi_D} = 0;$$

– по координате $\varphi_{п}$:

$$Q_{\varphi_{п}} = \sum_{i=1}^n M_{СК}(F_{iп}) = (F_{1п} + F_{2п}) \cdot h_{п},$$

где $M_{СК}(F_{iп})$ – суммарный момент сопротивления качению, действующий на колеса прицепа; $F_{1п}$ – сила трения качения, препятствующая движению колёсам передней оси прицепа, Н; $F_{2п}$ – сила трения качения, препятствующая движению колёсам задней оси прицепа, Н; $h_{п}$ – расстояние от опорной поверхности до центра тяжести прицепа, м.

Определим силы трения качения, действующие на прицеп в составе тракторного поезда при торможении:

$$F_{1п} = N_{1п} \cdot \frac{f_{1п}}{r_{ДК_{1п}}};$$

$$F_{2п} = N_{2п} \cdot \frac{f_{2п}}{r_{ДК_{2п}}},$$

где $N_{1п}$ – реакция опорной поверхности на передние колёса прицепа в положении статического равновесия, Н; $N_{2п}$ – реакция опорной поверхности на задние колёса прицепа в положении статического рав-

новесия, Н; $f_{1п}$ – коэффициент трения качения передних колёс прицепа, м; $f_{2п}$ – коэффициент трения качения задних колёс прицепа, м; $r_{ДК_{1п}}$ – динамический радиус качения передних колёс прицепа, м; $r_{ДК_{2п}}$ – динамический радиус качения задних колёс прицепа, м.

Определим реакции опорных поверхностей на колёса прицепа в положении статического равновесия:

$$N_{1п} = \frac{G_{п} \cdot l_g}{l_f + l_g};$$

$$N_{2п} = \frac{G_{п} \cdot l_f}{l_f + l_g},$$

где $G_{п}$ – вес прицепа, Н.

С учетом вышесказанного запишем выражение для определения $Q_{\varphi_{п}}$:

$$Q_{\varphi_{п}} = (F_{1п} + F_{2п}) \cdot h_{п} = \left(\frac{G_{п} \cdot l_g}{l_f + l_g} \cdot \frac{f_{1п}}{r_{ДК_{1п}}} + \frac{G_{п} \cdot l_f}{l_f + l_g} \cdot \frac{f_{2п}}{r_{ДК_{2п}}} \right) \cdot h_{п};$$

– по координате φ_{1T} :

$$Q_{\varphi_{1T}} = M_{TK_{1T}};$$

где $M_{TK_{1T}}$ – тормозной момент на передних колёсах трактора, Н·м.

Тормозной момент на передних колёсах трактора определяется:

$$M_{TK_{1T}} = \left[\frac{G_T \cdot l_b}{l_a + l_b} + c_{ш1T} \cdot (q_{1T} - z_{1T}) + k_{ш1T} \cdot (\dot{q}_{1T} - \dot{z}_{1T}) \right] \cdot r_{ДК_{1T}} \cdot \varphi_{сц_{1T}},$$

где $r_{ДК_{1T}}$ – динамический радиус качения передних колёс трактора, м.

– по координате φ_{2T} :

$$Q_{\varphi_{2T}} = M_{TK_{2T}};$$

где $M_{TK_{2T}}$ – тормозной момент на задних колёсах трактора, Н·м.

Тормозной момент на задних колёсах трактора определяется:

$$M_{TK_{2T}} = \left[\frac{G_T \cdot l_a}{l_a + l_b} + c_{ш2T} \cdot (q_{2T} + l_b \cdot \sin \varphi_T - z_{C_T}) + k_{ш2T} \cdot (\dot{q}_{2T} + \dot{\varphi}_T \cdot l_b \cdot \cos \varphi_T - \dot{z}_{C_T}) \right] \cdot r_{ДК_{2T}} \cdot \varphi_{сц_{2T}},$$

где $r_{ДК_{2T}}$ – динамический радиус качения задних колёс трактора, м.

– по координате $\varphi_{1п}$:

$$Q_{\varphi_{1п}} = \frac{G_{п} \cdot l_g}{l_f + l_g} \cdot \frac{f_{1п}}{r_{ДК_{1п}}} \cdot r_{ДК_{1п}} = \frac{G_{п} \cdot l_g}{l_f + l_g} \cdot f_{1п};$$

– по координате $\varphi_{2п}$:

$$Q_{\varphi_{2п}} = \frac{G_{п} \cdot l_f}{l_f + l_g} \cdot \frac{f_{2п}}{r_{ДК_{2п}}} \cdot r_{ДК_{2п}} = \frac{G_{п} \cdot l_f}{l_f + l_g} \cdot f_{2п}.$$

Заключение. Приведенные дифференциальные уравнения могут быть использованы для моделирования процесса торможения тракторного поезда в составе колесного трактора и прицепа по горизонтальной опорной поверхности с целью определения расчетной нагрузки переднего моста трактора, которая позволит эффективно использовать сцепной вес его передних колёс при торможении.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Государственный стандарт Российской Федерации. Единообразные предписания, касающиеся официального утверждения механических транспортных средств категорий М, N и O в отношении торможения: ГОСТ Р 41.13-99 (Правила ЕЭК ООН N 13) – Москва: ИПК Издательство стандартов, 2000. – 185 с.

2. Повышение эффективности тормоза передних колес трактора МТЗ / А.С. Мельников, И.С. Сазонов, В.А. Ким, А.А. Мельников // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2017. – № 1. – С. 54–62.
3. Тормозные системы колесных машин : монография / И.С. Сазонов [и др.] ; под общ. ред. И.С. Сазонова. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2011. – 351 с.
4. Лурье, А.И. Аналитическая механика. – Москва : Физматгиз, 1961. – 824 с.

Материал поступил в редакцию 20.11.2017

VOLOSHCHUK A.A., KIM V.A., MONTIK S.V., BEREZUCKAYA S.O. The equations of braking tractor train composed of a wheeled tractor and trailer on a horizontal support surface

The proposed differential equation of deceleration of the tractor trains that can be used for simulation of the braking process, the tractor train, composed of a wheeled tractor and trailer on a horizontal support surface with the purpose of determining the estimated load of the front axle of the tractor.

УДК 662.812 : 628.33

Санюкевич Ф.М.

О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ В КРИВОЛИНЕЙНОМ КАНАЛЕ ЦИКЛОННОГО АППАРАТА

Введение. Одним из наиболее эффективных устройств, использующих действие центробежных сил, являются циклонные аппараты. В них центробежное поле возникает во вращающемся потоке газа или жидкости. Газовые циклоны появились в начале XX столетия и быстро нашли применение для очистки воздуха и дымовых газов от пыли.

Принцип действия и конструкции газовых циклонов были использованы в напорных гидроциклонах – аппаратах для разделения жидких неоднородных систем. В настоящее время гидроциклоны получили широкое распространение в таких отраслях промышленности, как горнорудная, угледобывающая, машиностроительная, нефтедобывающая и нефтеперерабатывающая, пищевая, микробиологическая, строительная, керамическая, а также в технологических процессах очистки природных и сточных вод [1–3]. Их используют для сгущения, осветления и классификации суспензий, промывки их твёрдых компонентов. В последние годы гидроциклоны стали применять для очистки смазочно-охлаждающих жидкостей при металлообработке, а также для разделения несмешивающихся жидкостей (например, для очистки нефтепродуктов от воды). Широко используют гидроциклоны и в системах очистки промышленных и бытовых сточных вод, что позволило в ряде случаев исключить применение отстойников, фильтров и центрифуг.

По сравнению с другим оборудованием, использующим действие центробежных сил, гидроциклоны обладают рядом преимуществ. Они являются наиболее простыми по конструкции аппаратами, работать с которыми может персонал невысокой квалификации. Отсутствие вращающихся частей не требует наличия специальных приводных устройств. Гидроциклоны компактны, занимают незначительные производственные площади, что даёт возможность устанавливать их на существующих предприятиях без их расширения. Низкие капитальные затраты на изготовление, надёжность в работе, высокая удельная производительность и возможность автоматического регулирования разделения неоднородной среды ставят гидроциклоны вне конкуренции с аналогичным оборудованием, использующим для интенсификации процесса разделения центробежное поле.

Теоретические предпосылки процесса разделения неоднородной среды в криволинейном канале циклонного аппарата. В общем случае напорный гидроциклон состоит из цилиндрической части диаметром D и высотой H , к которой снизу примыкает своим большим основанием конус с углом конусности α . Диаметр D является основным параметром циклона, влияющим на процесс разделения неоднородной среды, и колеблется в широких пределах: от 10 до 750 мм. Исходная жидкость поступает в цилиндрическую часть под давлением через входной (питающий) патрубок, который выполняют строго по касательной к внутренней поверхности цилиндриче-

ской части. Такое конструктивное исполнение питающего патрубка обеспечивает создание и постоянную поддержку вращательного движения жидкости, что приводит в свою очередь к появлению центробежной силы, необходимой для разделения исходной двух- или многокомпонентной системы.

На эффективность работы гидроциклонов влияют физические и гидродинамические свойства разделяемых суспензий, геометрические параметры циклонов и поле центробежных сил, которое возникает при криволинейном движении потоков. Напорные гидроциклоны обычно работают в вертикальном положении, однако при больших давлениях питания (свыше 0,5 МПа) центробежные силы столь значительны, что аппараты устойчиво работают в любом положении.

При расчётах процесса сепарации различных материалов в криволинейном потоке циклонного аппарата возникает много трудностей в случае учёта всех сложных явлений, проявляющихся при движении контактной среды, которая состоит из твёрдых частиц, находящихся во взвешенном состоянии и образующих вместе с разделяющей их жидкостью гетерофазную систему. С целью упрощения расчётов теория сепарации обычно абстрагируется от наличия системы и рассматривает движение изолированных частиц, представляющих собой идеальные сферы, диаметры которых определяются как среднее между наибольшим и наименьшим размерами частиц. При этом исключаются электрические силы, тепловые и силы трения частиц о стенки аппарата. Весьма незначительное влияние на характер движения частиц в условиях высокотурбулентного закрученного потока оказывают гравитационные силы. По сравнению с силами инерции они столь малы, что действием их обычно пренебрегают.

Известно, что тангенциальные скорости жидкости в гидроциклонах значительно превосходят осевые и сепарация происходит в основном из-за радиальной скорости. Поэтому движение частиц рассматривают в горизонтальном криволинейном потоке, где они преодолевают сопротивление среды (жидкости), величина которого в основном зависит от размеров частиц и скорости её движения.

При движении шаровой одиночной частицы сила гидродинамического сопротивления среды выражается формулой

$$F = c\pi d^2 \rho_{ж} v_c^2 / 8, \quad (1)$$

где $c = f(\text{Re})$ – коэффициент сопротивления движению частицы, являющийся функцией числа Рейнольдса Re по частице: $\text{Re} = v_c d \rho_{ж} / \mu$; v_c – скорость относительного движения частицы или скорость сепарации; d – диаметр частицы; $\rho_{ж}$ – плотность жидкости (среды); μ – динамическая вязкость жидкости.

Санюкевич Федор Михайлович, к.т.н., доцент, доцент кафедры машиностроения и эксплуатации автомобилей Брестского государственного технического университета.
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.