УДК 517.958

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Наумовец С.Н.
Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Корзюк В.И., д.физ.-мат.н., профессор

1. Постановка задачи

В замыкании $\bar{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$ области $Q=(0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $x=(x_0,x_1)\in\bar{Q}\subset R^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$Lu=\left(\partial_{x_0x_0}-a^2\partial_{x_1x_1}\right)u(x)=f(x),\quad (x)\in\bar{Q}, \tag{1}$$

где a^2, l – положительные действительные числа, $\partial_{x_0x_0}=\partial^2/\partial x_0^2$, $\partial_{x_1x_1}=\partial^2/\partial x_1^2$ – частные производные по x_0 и x_1 второго порядка. К уравнению (1) на границе ∂Q области Q присоединяются условия типа Коши и граничные условия на боковых ее частях

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1),\quad \partial_{x_0}u(0,x_1)=\psi(x_1),\quad x_1\in[0,l], \tag{2}$$

$$\partial_{x_0}^2u(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0),\quad u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0),\quad x_0\in[0,\infty). \tag{3}$$

Здесь $f:\bar{Q}\ni x\to f(x)$ – заданная функция на $\bar{Q}$, $\varphi:[0,l]\ni x_1\to\varphi(x_1)\in R$, $\psi:[0,l]\ni x_1\to\psi(x_1)\in R$ – функции на $[0,l]$, $\mu^{(j)}:[0,\infty)\ni x_0\to\mu^{(j)}(x_0)\in R$, заданные функции на $[0,\infty)$, гладкость которых будет уточнена ниже, $j=1,2$.

2. Решение уравнения (1)

Общее решение уравнения (1) представляет сумму общего решения $u^{(0)}$ однородного уравнения

$$\left(\partial_{x_0x_0}-a^2\partial_{x_1x_1}\right)u^{(0)}(x)=0,\quad x\in\bar{Q}, \tag{4}$$

и частного решения *v* неоднородного уравнения (1).

Частное решение *v* уравнения (1) находим через решение однородного уравнения (4) *w* с параметром $\tau\in[0,\infty)$ по формуле

$$v(x)=\int_0^{x_0}w(x_0-\tau,\tau,x_1)\,d\tau. \tag{5}$$

Здесь функция $w:(x_0,\tau,x_1)\to w(x_0,\tau,x_1)$ – решение однородного уравнения

$$\partial_{x_0x_0}w(x_0,\tau,x_1)-a^2\partial_{x_1x_1}w(x_0,\tau,x_1)=0,\quad x_1\in[0,l], \tag{6}$$

удовлетворяющего условиям Коши

$$w(0,\tau,x_1)=0,\quad \partial_{x_0}w(0,\tau,x_1)=f(\tau,x_1),\quad x_1\in[0,l],\tau\in[0,\infty), \tag{7}$$

где *f* – правая часть уравнения (1).

Общее решение уравнения (6) есть сумма двух произвольных функций, а именно

$$w(0,\tau,x_1)=G^{(1)}(x_1-ax_0,\tau)+G^{(2)}(x_1+ax_0,\tau). \tag{8}$$

Подставив выражение (8) в условия Коши (7), получим систему уравнений

$$G^{(1)}(x_1,\tau)+G^{(2)}(x_1,\tau)=0,\quad x_1\in[0,l],$$

$$-a\partial_{x_1-ax_0}G^{(1)}(x_1-ax_0,\tau)(x_0=0)+a\partial_{x_1+ax_0}G^{(2)}(x_1+ax_0,\tau)(x_0=0)=f(\tau,x_1),$$

или

$$-a\partial_z G^{(1)}(z,\tau)+a\partial_z G^{(2)}(z,\tau)=f(\tau,z),\quad z\in[0,l].$$

Из системы определяем частично значения функций $G^{(j)}$, а именно:

$$G^{(j,0)}(z,\tau)=\frac{(-1)^j}{2a}\int\limits_0^z f(\tau,\xi)\,d\xi,\quad z\in[0,l],\ j=1,2. \tag{9}$$

По условию задачи $x\in\overline{Q}$. Для всех этих значений x области определения $D(x_1-ax_0)=(-\infty,l]$, $D(x_1+ax_0)=[0,\infty)$ при $a>0$. Поэтому области определения $D\left(G^{(1)}\right)=(-\infty,l]\times[0,\infty)$, $D\left(G^{(2)}\right)=[0,\infty)\times[0,\infty)$, так как функция f определена на $\overline{Q}$. Функции $G^{(j,0)}$ $(j=1,2)$ с помощью формул (9) определены только на отрезке $[0,l]$ относительно первого независимого переменного. В связи с этим введем обозначения

$$G^{(j)}(z,\tau)=\begin{cases} G^{(j,0)}(z,\tau),\ z\in[0,l],\\ G^{(j,1)}(z,\tau),\ z\in D\left(g^{(j)}\right)\setminus[0,l],\end{cases} \tag{10}$$

где $D\left(g^{(1)}\right)=(-\infty,l]$, $D\left(g^{(2)}\right)=[0,\infty)$. Чтобы функции $G^{(j)}$, определяемые формулами (10), принадлежали классу $C^2\left(D\left(g^{(j)}\right)\right)$ относительно первого аргумента, должны выполняться условия согласования

$$\begin{gathered} G^{(1,1)}(0,\tau)=0,\quad \frac{\partial G^{(1,1)}}{\partial z}(z,\tau)\big|_{z=0}=-\frac{1}{2a}f(\tau,0),\\ \frac{\partial^2 G^{(1,1)}}{\partial z^2}(z,\tau)\big|_{z=0}=-\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial z}f(\tau,z)\big|_{z=0}. \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} G^{(2,1)}(l,\tau)=G^{(2,0)}(l,\tau)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^l f(\tau,y)\,dy,\\ \frac{\partial G^{(2,1)}}{\partial z}(z,\tau)\big|_{z=l}=\frac{\partial G^{(2,0)}}{\partial z}(z,\tau)\big|_{z=l}=\frac{1}{2a}f(\tau,l),\\ \frac{\partial^2 G^{(2,1)}}{\partial z^2}(z,\tau)\big|_{z=l}=\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial z}f(\tau,z)\big|_{z=l}. \end{gathered} \tag{12}$$

Через функцию w, определяемую соотношениями (9)–(12), введем функцию $v:\overline{Q}\ni(x_0,x_1)\to v(x_0,x_1)\in R$, значения которой вычисляются формулой (5), то есть

$$v(x)=\int\limits_0^{x_0}G^{(1)}\left(x_1-a(x_0-\tau),\tau\right)d\tau+\int\limits_0^{x_0}G^{(2)}\left(x_1+a(x_0-\tau),\tau\right)d\tau. \tag{13}$$

Заметим, что функции $G^{(j,0)}$ на все области определения $D\left(G^{(j)}\right)$ $(j=1,2)$ можно продлить полиномами, а именно

$$G^{(1,1)}(z,\tau)=-\frac{1}{2a}f(\tau,0)\,z-\frac{1}{4a}\frac{\partial}{\partial z}f(\tau,z)\big|_{z=0}\cdot z^2,$$

$$G^{(2,1)}(z,\tau)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^l f(\tau,y)\,dy+\frac{1}{2a}f(\tau,l)(z-l)+\frac{1}{4a}\frac{\partial}{\partial z}f(\tau,z)\big|_{z=l}\cdot(z-l)^2.$$

Лемма 1. *Если функция f принадлежит классу* $C^{0,1}(\bar{Q})$ *и для* $G^{(j)}$, $j=1,2$, *выполняются условия* (11), (12) *(условия согласования), то функция v, определенная формулами* (13), (9)–(12), *принадлежит классу* $C^2(\bar{Q})$, *является решением уравнения* (1) *и удовлетворяет однородным условиям Коши*

$$v(0,x_1)=\partial_{x_0}v(0,x_1)=0. \tag{14}$$

3. Задача (1)–(5). Однородные условия согласования

Так как имеем частное решение *v* неоднородного уравнения (1), а общее решение *u* этого уравнения представимо в виде суммы $u(x_0,x_1)=u^{(0)}(x_0,x_1)+v(x_0,x_1)$, то дальнейшие исследования сводятся к решению однородного уравнения (4) относительно функции $u^{(0)}:\bar{Q}\ni x\to u^{(0)}(x)\in R$. В силу (14) решение $u^{(0)}$ должно удовлетворять условиям Коши

$$\begin{gathered}u^{(0)}(0,x_1)=\varphi(x_1),\\ \partial_{x_0}u^{(0)}(0,x_1)=\partial_{x_0}(u-v)=\partial_{x_0}u(0,x_1)-\partial_{x_0}v(0,x_1)=\psi(x_1),\quad x_1\in[0,l],\end{gathered} \tag{15}$$

и граничным условиям

$$\partial^2_{x_0}u^{(0)}(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0)-\partial^2_{x_0}v(x_0,0)=\tilde{\mu}^{(1)}(x_0), \tag{16}$$

$$u^{(0)}(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0)-v(x_0,l)=\tilde{\mu}^{(2)}(x_0). \tag{17}$$

Общее решение уравнения (4) представляет собой сумму двух функций

$$u^{(0)}(\boldsymbol{x})=g^{(1)}(x_1-ax_0)+g^{(2)}(x_1+ax_0), \tag{18}$$

где $g^{(j)}$ – произвольные функции из класса $C^m\left(D\left(g^{(j)}\right)\right)$. Области определения их как функций одного независимого переменного *z* следующие: $D\left(g^{(1)}\right)=(-\infty,l]\subset R$, $D\left(g^{(2)}\right)=[0,\infty)\subset R$, для любого $\boldsymbol{x}\in\bar{Q}$. Из условий Коши находим значения $g^{(j)}(z)$ функций $g^{(j)}$, которые определяются формулами

$$g^{(j)}(z)=g^{(j,0)}(z)=\frac{1}{2}\varphi(z)+\frac{(-1)^j}{2a}\int_0^z\psi(\xi)d\xi+(-1)^jC,\ z\in[0,l], \tag{19}$$

где *C* – произвольная постоянная из множества действительных чисел R.

Далее значения $g^{(j)}(z)$ для $z\in D\left(g^{(j)}\right)\setminus[0,l]$ определяются из граничных условий (16), (17).

$$\begin{gathered}g^{(1,k)}(z)=\int_0^z(z-\xi)\tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi+C^{(1,k)}z+C^{(0,k)}-g^{(2,k-1)}(-z),\\ z\in\left[-kl,-(k-1)l\right],\end{gathered} \tag{20}$$

$$g^{(2,k)}(z)=\tilde{\mu}^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right)-g^{(1,k-1)}(2l-z),\ z\in\left[kl,(k+1)l\right],\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{21}$$

Из последних формул видно, что значения функций $g^{(j)}$, $j=1,2$, определены кусочно на соответствующих отрезках через значения заданных функций $\varphi,\psi,\tilde{\mu}^{(j)}\ (j=1,2)$, f. Поэтому, если потребовать достаточную гладкость этих функций, то и функции $g^{(j,k)}$ будут на указанных отрезках тоже гладкими, например, из класса C^2, $j=1,2$; $k=0,1,\ldots$. Следовательно, и решение задачи (1)–(3) тоже будет кусочно-гладким. Нам надо, чтобы функция (18) была из класса $C^2\left(\overline{Q}\right)$ на всем множестве $\overline{Q}$, так как согласно лемме 1 $v\in C^2\left(\overline{Q}\right)$, если $f\in C^{0,1}\left(\overline{Q}\right)$. Для этого потребуем, чтобы функции (19)–(21) и их производные первого и второго порядков совпадали в общих точках соприкосновения.

Таким образом, чтобы функция $g^{(1)}$ принадлежала $C^2\left(-\infty,l\right]$, а $g^{(2)}$ – классу $C^2\left[0,\infty\right)$, кроме требований на гладкость заданных функций $f,\varphi,\tilde{\psi},\tilde{\mu}^{(j)}\left(j=1,2\right)$ задачи (4), (15), (16), (17) должны выполняться равенства

$$d^p g^{(1,k)}(z)|_{z=-kl}=d^p g^{(1,k+1)}(z)|_{z=-kl},\ k=0,1,\ldots,\ p=0,1,2, \tag{22}$$

$$d^p g^{(2,k-1)}(z)|_{z=kl}=d^p g^{(2,k)}(z)|_{z=kl},\ k=1,2,\ldots,\ p=0,1,2. \tag{23}$$

Лемма 2. *Равенства* (22) *выполняются для всех* $k=0,1,2,\ldots$, *а равенства* (23) *для* $k=1,2,\ldots$ *тогда и только тогда, когда* (22) *выполняются только для k=0, а* (23) *– для k=1. При этом произвольные постоянные* $C^{(i,k)}$ *в формулах* (20) *должны быть одни и те же для всех* $k=1,2,\ldots$, *то есть* $C^{(i,k)}=C^{(i)}$.

Из равенств (22), (23) получаем условия согласования

$$C^{(0)}=\varphi(0),\ C^{(1)}=-\frac{1}{a}\psi(0),\ \frac{1}{a^2}\tilde{\mu}^{(1)}(0)=\varphi''(0), \tag{24}$$

$$\tilde{\mu}^{(2)}(0)=\varphi(l),\ \tilde{\mu}^{(2)\prime}(0)=\psi(l),\ \frac{1}{a^2}\tilde{\mu}^{(2)\prime\prime}(0)=\varphi''(l). \tag{25}$$

Теорема 1. *Если функции* $\varphi\in C^2\left(\left[0,l\right]\right)$, $\psi\in C^2\left(\left[0,l\right]\right)$, $\tilde{\mu}^{(1)}\in C^1\left(\left[0,\infty\right)\right)$, $\tilde{\mu}^{(2)}\in C^2\left(\left[0,\infty\right)\right)$, *то функция вида* (18) *является единственным классическим решением из класса* $C^2\left(\overline{Q}\right)$ *задачи* (4), (2), (16), (17) *тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования* (24), (25), *константы* $C^{(i)}=C^{(i,k)}$, $k=1,2,3,\ldots$.

Теорема 2. *Если функции* $\varphi\in C^2\left(\left[0,l\right]\right)$, $\psi\in C^2\left(\left[0,l\right]\right)$, $\tilde{\mu}^{(1)}\in C^1\left(\left[0,\infty\right)\right)$, $\tilde{\mu}^{(2)}\in C^2\left(\left[0,\infty\right)\right)$, $f\in C^{0,1}\left(\overline{Q}\right)$, то существует единственное из класса $C^2\left(\overline{Q}\right)$ классическое решение $u\left(x_0,x_1\right)=u^{(0)}\left(x_0,x_1\right)+v\left(x_0,x_1\right)$ тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования

$$\frac{1}{a^2}\left(\mu^{(1)}(0)-f(0,0)-a^2\varphi''(0)\right)=0,$$

$$\mu^{(2)}(0)-\varphi(l)=0,\ \mu^{(2)\prime}(0)-\psi(l)=0,\ \frac{1}{a^2}\left(\mu^{(2)\prime\prime}(0)-f(0,l)-a^2\varphi''(l)\right)=0$$

константы $C^{(i)}=C^{(i,k)}$, $k=1,2,3,\ldots$, $i=0,1$, причем $C^{(0)}=\varphi(0)$, $C^{(1)}=-\frac{1}{a}\psi(0)$, где частное решение *v* определяется формулами (5), (8), (10), решение $u^{(0)}$ задачи (4), (2), (16), (17) – формулами (18)–(21).

Список цитированных источников

1. Корзюк, В.И. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В.И. Корзюк, И.С. Козловская, С.Н. Наумовец // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук. – 2015. – №1. – С. 17–20.