Ст. пр-ль Клубович К. В.
Ст. пр-ль Некраш Б. Н.

БИСИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ФИЗИКЕ

/Для студентов вечернего и дневного отделений/

г. Брест
1975 г.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

БРЕСТСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

Ст. пр-ль КЛУБОВИЧ К. В.

Ст. пр-ль НЕКРАШ В. Н.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ФИЗИКЕ

/ для студентов вечернего и дневного отделений /

-78

г. Брест

1975 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение I
Требования к физическому опыту 2
Основные задачи учебного лабораторного практикума .. 2
Измерение физических величин 3
Погрешности измерения 4
Элементы теории погрешности 6
а/ Погрешности непосредственных измерений 6
б/ Погрешности косвенных измерений 7
Степень точности результата I2
Правила округления чисел I3
О приближённых вычислениях I4
Примеры вычисления погрешностей I6
Пример I I7
Пример 2 ....I8
Некоторые советы и указания I9

ВВЕДЕНИЕ

Важную роль в изучении курса физики играет лабораторный практикум, который призван помочь студентам глубже уяснить основные физические законы, познакомиться с основными физическими приборами, подготовить студентов к проведению эксперимента, а также практически освоить наиболее важные методы измерения.

Всегда исследователь, наблюдая явления природы, сопоставляет результаты отдельных наблюдений и ранее известные факты, обобщает их и выделяет главные факторы — т. е. отыскивает повторяющие признаки явления как группы явлений и, таким образом, на пути этого обобщения создается гипотеза.

Для проверки гипотезы необходима постановка физического эксперимента, иначе — физического опыта. Поэтому физика является опытной наукой.

Физическим опытом называется воспроизведение явления в искусственных условиях, возможно полнее исключив влияние второстепенных связей на ход явления. Если опыт подтверждает правильность высказанной гипотезы, она становится физической теорией. А установленные ею общие для группы явлений основные связи называются физическим законом. Бывают случаи, когда накопленные новые данные наблюдений и опытов вступают в противоречие с ранее созданной теорией. Тогда из сопоставления новых и ранее известных фактов возникает более полная теория. Старая теория либо сохраняет справедливость только для группы фактов, которые она обобщала, либо, что бывает реже, оказывается ложной. Так например, до Галилея считали, что воздействие необходимо не для изменения скорости, а для поддержания ее неизменной. Сейчас известно, что под действием силы тела получают ускорение, а не поддерживают скорость. Современный математический аппарат позваляет открывать новые законы, но они остаются гипотезой, пока опыт не подтвердит их или не опровергнет. Следовательно, наблюдение и опыт являются основными средствами познания природы и служат накоплению новых данных, так и проверке правильности их теоретических обобщений. Во многих случаях опыт служит единственным средством определения численных значений физических постоянных и табличных данных, характеризующих свойства веществ.

ТРЕБОВАНИЯ К ФИЗИЧЕСКОМУ ОПЫТУ.

Правильно поставленный физический опыт должен удовлетворять следующим основным требованиям:

1. Опыт ставится для ответа на ясно сформулированный вопрос.
2. Опыт не должен допускать многозначного истолкования полученных результатов.
3. Он должен возможно полнее исключить влияние второстепенных факторов на исследуемую связь.
4. Условия опыта должны, по желанию исследователя, поддерживаться постоянными или изменяться заданным образом.
5. Обеспечивать возможно более высокую точность всех необходимых измерений.
6. Постановка опыта, по силе возможности, должна обеспечить повторение опыта в неизменных условиях.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УЧЕБНОГО ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА.

1. Формирование у студентов представления об объективном характере физических законов.
2. Формирование у студентов представления о точности физических законов и о зависимости этой точности от того, на сколько строго соблюдаются условия, в которых может применяться данный закон.
3. Ознакомление с некоторыми физическими явлениями, которые трудно или невозможно воспроизвести в лекционных демонстрациях.
4. Ознакомление с некоторыми методами физических измерений, приобретение элементарных навыков их использования.
5. Озакомление с наиболее распространенными измерительными приборами и с принципом их действия.
6. Приобретение навыков в обработке опытных данных и и представлений о численных значениях основных физических величин.
7. Совершенствование навыков в самостоятельной работе над книгой и в самостоятельном отыскании наилучших решений для элементарных опытов.

ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН.

Измерение — это процесс сравнения данной величины с другой однородной величиной, принятой за единицу. Например, измерение длины предмета сводится к сравнению его со шкалой, разделенной на метры, сантиметры, миллиметры и т. д. Почти все приборы, при помощи которых измеряем физическую величину, снабжены линейными или дуговыми шкалами, деления которых имеют ту или другую цену, выраженную в единицах, принятых для измерения определяемой величины. Но для непосредственного измерения доступно лишь ограниченное число чисто физических величин. В большинстве случаев приходится прибегать к расчетам по формулам. Так, например, при определении модуля Юнга E из растяжения проволоки мы непосредственно определяем удлинение Δl, длину l и диаметр d проволоки, а также силу F, под действием которой произошло удлинение, а потом по формуле

$$E = \frac{4 l F}{\pi d^2 \Delta l}$$

находим модуль Юнга E. Поэтому измерения делятся на <u>непосредственные</u> и <u>косвенные</u> измерения.

В зависимости от поставленной задачи выбираются единицы измерения, но вообще говоря, выбор их является произвольным. Наиболее употребительной в физике является международная система единиц / СИ /. Допускается также применение системы / СГС /, но окончательные результаты измерений и вычислений должны выражаться в системе СИ. Основными единицами этой системы являются:

единица длины — метр / м /,
единица массы — килограмм / кг /,
единица времени — секунда / с /,
единица термодинамической температуры — градус Кельвина/К/,
единица силы электрического тока — ампер / А /,
единица силы света — кандела / кд /.

Дополнительными единицами СИ являются единица плоского угла — радиан и единица телесного угла — стерадиан. Все остальные, так называемые производные, единицы системы образуются из основных и дополнительных единиц с помощью уравнений определяющие физические связи.

При физических измерениях, в большинстве случаев, приходится иметь дело с тремя последовательными операциями: установкой приборов, наблюдением и отсчетом.

Установка приборов требует их правильного размещения, при котором должны быть приняты во внимание те или иные внешние и внутренние обстоятельства и условия измерения: например установить прибор вертикально, расположить правильно несколько приборов в электрической цепи и т. д.; требует определения влияния различных внешних факторов на действие приборов, например температуры, давления и т. д.; если это влияние значительно, то оно должно быть устранено или принято во внимание.

Наблюдение по своему характеру может быть весьма разнообразным; иногда, например, требуется определить момент исчезновения электрического тока в цепи, звукового впечатления, достижения максимальной температуры и т. д. Когда все это достигнуто, производят отсчет. По результатам отсчета определяется измеряемая величина.

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ.

Всегда экспериментатор при любых измерениях физических величин допускает ошибки /погрешности/. Эти погрешности допускаются благодаря несовершенству измерительных приборов, которыми мы пользуемся, и несовершенству наших органов чувств. Все измерения можно делать только с известной степенью точности; поэтому результаты измерений дают нам не истинное значение измеряемой величины, а лишь приближенное. Улучшение техники и методики измерения может лишь уменьшить величину допускаемых при измерении погрешностей, но ни в коем случае не сводит их к нулю. Так, например, вес тела определен на технических весах с точностью до 10 мГ, то это значит, что найденный вес отличается от истинного веса тела менее чем на 10 мГ. На аналитических весах можно взвесить с точностью до 0,1 мГ.

В зависимости от класса точности прибора мы измеряем физическую величину с большей или меньшей погрешностью. Но создать такие приборы, при помощи которых можно измерить физическую величину без погрешности, — невозможно. Степень точности измерений зависит от употребляемых при измерениях приборов и от общих методов измерений, и поэтому мы не можем перешагнуть предел точности при всех наших стараниях. Обыкновенно приходится довольствоваться точностью 0,1 %

измеряемой величины. В некоторых случаях можно достичь значительно большей точности; так, даже взвешивая тело на технических весах около 200 Г получаем точность измерения 10 мГ, т. е. точность 0,005 %, а на аналитических весах точность 0,00005 %. В других случаях получение точности 0,1 % является почти недостижимым; таковы, например, измерения температуры при помощи термометров. Обыкновенным термометром можно отсчитывать температуру с точностью $0,1^{\circ}$, иногда с точностью $0,05^{\circ}$. Пусть измеренная термометром температура $10^{\circ}C$, а точность его $0,1^{\circ}$, то степень точности составит 1 % измеряемой величины. Отсюда следует, что прежде, чем приступить к измерениям, необходимо предварительно определить пределы точности, которые могут быть получены с данными приборами. Но иногда приходится в задаче измерять различные величины и пределы точности оказываются для каждой измеряемой величины различными, то нет надобности при отдельных измерениях выходить далеко за пределы точности наименее точно определяемой величины. Например, при калориметрических измерениях определить массу воды и калориметра путем взвешивания можно с точностью около 0,0001 % /на аналитических весах/. Но в данной задаче нет надобности производить взвешивание с такой точностью, а можно ограничиться весами с меньшей точностью взвешивания, например до 0,1 %, так как измерение температуры может быть сделано с точностью лишь 1 %. Для повышения точности окончательного результата, всякое физическое измерение необходимо делать не один, а несколько раз при одинаковых условиях опыта. Выше было сказано, что при измерениях и отсчетах мы всегда делаем более или менее значительные ошибки /погрешности/. Все ошибки /погрешности/ можно разделить на две группы: ошибки <u>систематические</u> и ошибки <u>случайные.</u>

<u>Систематические ошибки /погрешности/</u> возникают вследствие причин одинаково действующих при всех повторных измерениях. Они появляются вследствие неисправности приборов, ошибочности самого метода измерения, или постоянного влияния внешнего фактора. Например, измерение толщины предмета микрометром со смещенной нулевой точкой шкалы будет давать в зависимости от знака смещения уменьшенное или увеличенное значение толщины. Естественно, что увеличение числа измерений влияния этих ошибок не уменьшит, их можно избежать

только относясь критически к самим методам измерений, следя за исправным состоянием приборов и строго придерживаясь выработанных практикой правил выполнения работ.

Случайные ошибки /погрешности/ обусловлены многими причинами, действующими при каждом отдельном измерении заранее неизвестным образом. Поэтому случайные ошибки в отличие систематических представляют собой ряд закономерных величин. Случайные ошибки подчиняются законам вероятности, а это значит, что при каком-нибудь измерении результат получается больше истинного значения, то при одном из последующих измерений столь же вероятно может получится результат меньше истинного. Поэтому очевидно, что многократное повторение одного и того же измерения уменьшает влияние случайных ошибок. Следовательно, среднее арифметическое из большого числа измерений одной и той же величины ближе всего к истинному значению измеряемой величины.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ.

а/ Погрешности непосредственных измерений. Пусть в результате измерения некоторой физической величины X получен ряд ее значений $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, где n - число отдельных измерений. Тогда среднее арифметическое значение величины $\bar{X}$

$$X = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

будет являться наиболее близким к истинному значению измеряемой величины. Разность между средним арифметическим и значением отдельного измерения

$$\bar{X} - X_1 = \pm \Delta X_1, \quad \bar{X} - X_2 = \pm \Delta X_2, \ \ldots$$

называется абсолютными погрешностями отдельных измерений. Средняя арифметическая из численных значений отдельных погрешностей ΔX носит название средней абсолютной погрешностью измерения.

$$\Delta X = \frac{\Delta X_1 + \Delta X_2 + \cdots + \Delta X_n}{n} \qquad /I/$$

При достаточно большом числе измерений случайные ошибки с равной вероятностью будут как в сторону преувеличения, так и в сторону преуменьшения измеряемой величины, то есть можно считать, что точное значение измеряемой величины заключено в интервале $\bar{X} - \Delta X \leq X \leq \bar{X} + \Delta X$.

Последнее неравенство записывают следующим образом:

$$X = \bar{X} \pm \Delta X.$$

При вычислении средней абсолютной погрешности измерений, значения отдельных абсолютных погрешностей подставляют в формулу / I /.

Абсолютная погрешность не может полностью характеризовать точность произведенных измерений. Так, например, если мы измерим отрезки 5 мм и I м с одной и той же абсолютной ошибкой $\pm$I мм, то точности измерений будут несравнимы. Поэтому, кроме абсолютной погрешности измерения, вычисляют его относительную погрешность. Отношения

$$\frac{\Delta X_1}{X_1}, \quad \frac{\Delta X_2}{X_2}, \ldots$$

носят название относительных погрешностей отдельных измерений, а отношение средней абсолютной погрешности ΔX к среднему значению измеряемой величины $\bar{X}$ называется средней относительной погрешностью измерений и обозначается буквой E, т.е.

$$E = \frac{\Delta X}{\bar{X}}.$$

Относительная погрешность является величиной безразмерной. Выражается она обычно в процентах:

$$E = \frac{\Delta X}{X} \cdot 100\%.$$

б/ <u>Погрешности косвенных измерений.</u> В практике редко приходится измерять непосредственно данную физическую величину, а в большинстве случаев она определяется косвенными путями. Сначала производится непосредственное измерение одной или нескольких физических величин, которые связаны при помощи математической формулы с определяемой величиной. При этом погрешность определяемой величины зависит от величины погрешностей непосредственных измерений исходных величин. Рассмотрим несколько примеров.

I. Пусть определяемая величина является суммой или разностью непосредственно измеряемых величин:

$$y = X_1 \pm X_2.$$

Абсолютная погрешность измерения величины X_I равна X_I, а абсолютная погрешность измерения величины X_2 есть X_2. Тогда, очевидно,

$$y \pm \Delta y = (X_1 \pm \Delta X_1) \pm (X_2 \pm \Delta X_2).$$

Погрешности ΔX_I и ΔX_2 могут быть любого знака, но их следует рассматривать при наиболее невыгодном случае, когда она будет наибольшей величины. При измерении суммы двух величин X_1 и X_2 наибольшую погрешность мы получим, если погрешности измерения величин X_1 и X_2 будут одного знака, а в случае измерения разности величин — если они будут разного знака. В обоих случаях, следовательно, абсолютная погрешность Δy определяемой величины y будет равна сумме абсолютных погрешностей непосредственно измеряемых величин X_1 и X_2:

$$\pm \Delta y = \pm (\Delta X_1 + \Delta X_2).$$

Вычисленную, таким образом, среднюю погрешность измерений называют предельной, а иногда максимальной погрешностью. Относительные погрешности измерений будут измеряться следующими формулами:

для суммы $$E = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta X_1 + \Delta X_2}{X_1 + X_2},$$

для разности $$E = \frac{\Delta X_1 + \Delta X_2}{X_1 - X_2}.$$

Из последней формулы видно, что относительная погрешность измерения тем больше, чем ближе значения измеряемых величин.

2. Найдем абсолютную и относительную погрешность произведения двух величин:

$$y = X_1 \cdot X_2.$$

Если X_1 измерено с погрешностью $\pm\Delta X_1$, а X_2 с погрешностью $\pm\Delta X_2$, то, очевидно, что

$$y \pm \Delta y = (X_1 \pm \Delta X_1)(X_2 \pm \Delta X_2) = X_1 X_2 \pm X_1 \cdot \Delta X_2 \pm X_2 \cdot \Delta X_1 \pm \Delta X_1 \cdot \Delta X_2.$$

Величиной $\Delta X_1 \cdot \Delta X_2$ можно пренебречь, так как ΔX_1 и ΔX_2 малы по сравнению с величинами X_1 и X_2, поэтому

$$\pm \Delta y = \pm (X_1 \cdot \Delta X_2 + X_2 \cdot \Delta X_1).$$

И здесь мы рассматриваем наиболее невыгодный случай, когда обе погрешности имеют один знак. Следовательно, абсолютная погрешность произведения равна сумме произведений абсолютной погрешности первого множителя на второй множитель и погрешности второго множителя на первый. Отсюда

$$E = \frac{\Delta y}{y} = \frac{X_1 \cdot \Delta X_2 + X_2 \cdot \Delta X_1}{X_1 \cdot X_2} = \frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2}.$$

Относительная погрешность произведения равна сумме относи -

тельных погрешностей множителей.

3. Найдем абсолютную и оносительную погрешность частного двух величин:

$$y = \frac{X_1}{X_2}.$$

Если ΔX_I и ΔX_2 — абсолютные погрешности соответствующих измеряемых величин, то

$$y \pm \Delta y = \frac{X_1 \pm \Delta X_1}{X_2 \mp \Delta X_2} = \frac{(X_1 \pm \Delta X_1)(X_2 \pm \Delta X_2)}{(X_2 \mp \Delta X_2)(X_2 \pm \Delta X_2)} =$$

$$= \frac{X_1 X_2 \pm \Delta X_1 X_2 \pm X_1 \Delta X_2 + \Delta X_1 \Delta X_2}{X_2^2 - (\Delta X_2)^2} = \frac{X_1 X_2 \pm X_2 \Delta X_1 \pm X_1 \Delta X_2}{X_2^2}.$$

Величинами $/\Delta X_2/^2$ и $\Delta X_I \cdot \Delta X_2$ пренебрегаем из-за их малости по сравнению с X_I и X_2, и рассматриваем самый невыгодный случай, когда погрешности в измерении числителя и знаменателя сделаны с обратным знаком. Здесь

$$\pm \Delta y = \pm \frac{X_2 \Delta X_1 + X_1 \Delta X_2}{X_2^2}.$$

Следовательно, абсолютная погрешность частного равна сумме произведений абсолютной погрешности числителя на знаменатель и абсолютной погрешности знаменателя на числитель деленной на квадрат знаменателя. Для относительной погрешности будем иметь

$$E = \frac{\Delta y}{y} = \frac{X_2 \Delta X_1 + X_1 \Delta X_2}{X_2^2} \cdot \frac{X_2}{X_1} = \frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2}.$$

Получили, что относительная погрешность частного равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя.

Если измеряемая величина входит в формулу для вычисления результата несколько раз, так, например,

$$y = \frac{X_1 + X_2}{X_2},$$

то в этом случае, чтобы не привести к ошибке, нужно брать одинаковые знаки в абсолютных погрешностях для величины X_2. В теории погрешностей всегда рассматривается наиболее невыгодный случай, когда абсолютная погрешность имеет максимальное значение, или иначе ее называют предельной. Аналогично можно вычислить абсолютные и относительные погрешности и для других математических зависимостей, но мы приведем готовую таблицу для наиболее встречающихся случаев в лабораторном практикуме. /См. стр. 20/.

Как правило, погрешности измерения достаточно малы по сравнению с измеряемыми величинами, поэтому мы пренебрегаем квадратами их величин, а это дает возможность для вычисления погрешностей пользоваться дифференциальным исчислением, что значительно упрощает подсчет погрешностей для сложных функций.

Если физическая величина y, которую мы определяем косвенно, является функцией одной, непосредственно измеряемой, величины

$$y = f(X).$$

Например, обьем V куба является функцией стороны X:

$$V = X^3.$$

Пусть средняя абсолютная погрешность измерения величины X есть $\pm\Delta X$, эта погрешность вызовет соответствующую погрешность искомой величины $\pm\Delta y$. Тогда уравнение приобретет вид:

$$y \pm \Delta y = f(X \pm \Delta X).$$

Используя формулу Тейлора для разложения правой части в ряд, получим

$$y \pm \Delta y = f(X) \pm f'(X)\Delta X \pm f''\frac{(\Delta X)^2}{2} \pm \dots$$

Пренебрегая членами разложения, содержащими ΔX в степени второй и выше, получим

$$y \pm \Delta y = f(X) \pm f'(X)\Delta X,$$

тогда

$$\pm\Delta y = \pm f'(X)\Delta X,$$

где $f'/X/$ — производная от функции $f/X/$ по X. Следовательно, абсолютная погрешность функции одного переменного равна произведению производной этой функции на абсолютную погрешность аргумента. Относительная погрешность измерения будет

$$E = \pm\frac{\Delta y}{y} = \pm\frac{f(X)\Delta X}{f(X)} = \pm\frac{\Delta f(X)}{f(X)}.$$

Если условно рассмвтривать погрешности как бесконечно малые, то относительная погрешность данного выражения запишется

$$E = \pm\frac{df(X)}{f(X)},$$

а это есть дифференциал от логарифма функции, т.е.

$$E = d[\ln f(X)].$$

Так как погрешность всегда является конечной величиной, то мы будем писать

$$E = \pm\Delta[\ln f(X)].$$

Относительная погрешность вычисления функции одного переменного равна дифференциалу натурального логарифма этой функции.

Пусть физическая величина y является функцией не одного, а многих непосредственно измеряемых величин X_I, X_2, X_3, ..., X_n, т. е.

$$y = f/ X_I, X_2, X_3, \ldots, X_n/.$$

Опять применим формулу Тейлора и отбросим члены содержащие ΔX_I, ΔX_2, ΔX_3, ..., ΔX_n во второй и выше степени, мы получим:

$$y \pm \Delta y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) + \left[\pm \frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_1} \Delta X_1 \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_2} \Delta X_2 \pm \cdots \pm \frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_n} \Delta X_n \right]$$

или

$$\pm \Delta y = \pm \frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_1} \Delta X_1 \pm \frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_2} \Delta X_2 \pm$$

$$\pm \cdots \pm \frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_n} \Delta X_n,$$

где

$$\frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_1}, \qquad \frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_2}, \ldots$$

частные производные первого порядка по X_I, X_2, X_3, ..., X_n.

Для того, чтобы вычислить частную производную от $f/ X_I, X_2, X_3, \ldots, X_n/$ по X_I, предполагают аргументы X_2, X_3, ..., X_n постоянными и вычисляют производную по обычным правилам вычисления поизводной функции одного переменного, и так вычисляют по другим аргументам.

Так как в теории погрешностей рассматривается наиболее невыгодный случай, т. е. когда абсолютная погрешность имеет максимальное значение, то мы должны все величины взять с одним знаком, поэтому запись для нахождения абсолютной погрешности будет:

$$\pm \Delta y = \pm \left[\left| \frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_1} \right| \cdot |\Delta X_1| + \left| \frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_2} \right| \cdot |\Delta X_2| + \right.$$

$$\left. + \cdots + \left| \frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_n} \right| \cdot |\Delta X_n| \right],$$

здесь взяты абсолютные значения всех величин. Для относительной погрешности
$$E = \frac{\Delta y}{y} = \pm \Delta\left[\ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right].$$

Предельная абсолютная погрешность функции многих переменных равна сумме модулей произведений частных производных этой функции на соответствующие абсолютные погрешности.

Предельная относительная погрешность функции многих переменных равна дифференциалу натурального лагорифма этой функции, причем берется сумма абсолютных значений всех членов этого выражения. Пользуясь последними выражениями, легко получить формулы для определения абсолютных и относительных погрешностей при различных математических операциях.

СТЕПЕНЬ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА.

Если искомая величина измеряется всего несколько раз, то о степени точности отклонения среднего арифметического от истинного значения этой величины можно судить лишь по средней погрешности измерения, и она определяет точность измерения результата. Если постоянная величина определяется большое число раз, то степень точности результата можно определить гораздо точнее, если воспользоваться теорией вероятностей, так как случайная погрешность измерения подчиняется законам теории вероятности. Здесь мы приводим конечные формулы, которые вытекают из теории вероятности.

Обозначим через σ среднее квадратичное отклонение от среднего арифметического или просто среднюю квадратичную погрешность, то
$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta X_i)^2}{n(n-1)}}$$
где n — число измерений, X — абсолютная погрешность отдельного измерения. Средняя погрешность отдельного измерения $\Delta X_{ср.}$ запишется:
$$\Delta X_{cp} = \pm 0{,}8 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta X_i)^2}{n(n-1)}}$$
Вероятная погрешность r /эта величина определяется как значение погрешности, при котором половина всех значений данного ряда измерений будут лежать в пределах от $\bar{X} - r$ до $\bar{X} + r$, где $\bar{X}$ — среднее арифметическое отдельных измерений/ запишется:

$$\tau = 0,6745\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} = 0,6745\,\sigma .$$

В этом случае окончательный результат измерений записывается так:

$$X = \bar{X} \pm \tau .$$

Следует иметь в виду, что последние формулы справедливы лишь для достаточно большого числа произведенных измерений, однако если мы пользуемся ею и в случае ограниченного числа произведенных измерений, то только потому, что для случая небольшого числа наблюдений мы не имеем иных средств к решению поставленной задачи.

ПРАВИЛА ОКРУГЛЕНИЯ ЧИСЕЛ.

При округлении чисел оставляют лишь верные знаки, остальные отбрасывают. При этом пользуются правилом дополнения, т. е. увеличивают последнюю из остающихся цифр на единицу, если первая из отбрасываемых больше 5, и оставляют последнюю из остающихся неизменной, если первая из отбрасываемых цифр меньше 5. Если первая из отбрасываемых цифр равна 5, то последнюю из остающихся увеличивают на единицу, если только отбрасываемая пятерка сама не появилась в результате округления.

Рассмотрим правила округления при арифметических действиях над приближенными числами.

а/ При сложении и вычитании окончательный результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотябы в одном из приближенных данных. /Значащими цифрами в числах называют все цифры от I до 9, а также нуль, если он стоит в середине или в конце числа. Например, число 0,03 имеет одну значащую цифру, число 0,2I — две значащих цифры, число 0,230 — три значащих цифры, а числа 24,I3 и 525,0 — четыре значащих цифры/. Например, при сложении чисел

$$\begin{array}{r} 1,235 \\ 4,26 \\ +\ 0,37526 \\ 2,0377 \\ \hline 7,90796 \end{array}$$

следует сумму округлять до сотых долей, т. е. принять ее равной 7,9I.

б/ При умножении и делении следует округлять так, чтобы каждое число содержало столько значащих цифр, сколько их имеет число с наименьшим количеством значащих цифр. Например, вместо вычисления выражения 2,3725 х I,3 х 2,035 следует вычислять выражение 2,4 х I,3 х 2,0 = 6,24 = 6,2, или при делении 23,754 : 3,0 следует вычислять 23,8 : 3,0 = 7,9.

в/ При возведении в квадрат или куб следует в степени брать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени. Например,

$$I,32^2 = I,74.$$

г/ При извлечении квадратного или кубического корня в результате нужно брать столько значащих цифр, сколько их имеется в подкоренном выражении. Например,

$$\sqrt{4,22} = 2,I0 \quad \text{или} \quad \sqrt{I,I7\cdot I0^{-8}} = I,08\cdot I0^{-4}.$$

При пользовании таблицами логарифмов выбирают значение логарифма до числа знаков, равного верному числу знаков в логарифмируемом числе

$$\lg 27,30 = I,436.$$

Следует заметить, что если соответствующая операция является промежуточной, то в результате следует брать на одну значащую цифру больше, чем указано в правилах, а в окончательном результате последнюю цифру отбрасывать с соблюдением правил округления, например:

$$\frac{/I,2 + 2I,562/\sqrt{5,7}}{2,I\cdot 5,0I7\cdot I0^2} = \frac{22,6\cdot I,92}{I0,5\cdot I0^2} = 4,I3\cdot I0^{-2} = 4,I\cdot I0^{-2}.$$

Здесь мы округляем до двух значащих цифр.

О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ.

Числовые значения, полученные при измерении физических величин, всегда являются приближенными, а следовательно, и косвенно вычисленные величины также являются приближенными. Точность вычислений /относительная погрешность/ определяется условиями задачи — выбором приборов, методикой измерений, навыками экспериментатора и т. д. Очень часто неопытные лица добиваются при вычислениях /математических операциях/ получения такой точности результатов, которая совершенно не оправдывается точностью данных измерений.

Рассмотрим такой пример. Пусть требуется определить плотность ρ некоторого тела. При взвешивании тела на технических весах с точностью до 0,0Iг определили массу тела

$m = 9,38$г. Затем, с точностью до 0,001 см^3 был измерен объем тела $V = 3,460$ см^3. Если не учитывать правила округления, то можно получить такой результат

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{9,38}{3,460} = 2,71098...\text{г/см}^3.$$

Но так как числа 9,38 и 3,460 приближенные, то последние цифры в этих числах сомнительные. Поэтому, учитывая правила округления чисел /приближенных/, мы должны записать:

$$\rho = \frac{9,38}{3,460} = 2,71 \text{ г/см}^3.$$

Степень приближения числа к его точному значению оценивается абсолютной и относительной погрешномтью:

$$\Delta X = X - X'; \qquad E = \frac{\Delta X}{X},$$

где X — значение числа, принятое за точное; X' — его приближенное значение.

При определении численного значения величины погрешности следует различать два случая: а/приближенные величины, значения которых могут быть вычислены с любой наперед заданной точностью. Такими величинами являются, в частности, многие константы, приводимые в справочниках. Например, число π, e, логарифмы и т. д. Так, число π как отношение длины окружности к ее диаметру — 3,14, при более точном вычислении $\pi = 3,141593$, аналогично и другие величины могут быть записаны с любой точностью. В этом случае за истинное значение величины принимается ее табличное значение, взятое с такой точностью, которая соответствует точности данной задачи. б/ Результаты измерений, ошибки которых нам никогда заранее не известны. Их погрешности находятся по следующим правилам. Абсолютная погрешность числа не должна превышать единицу цифры последнего разряда в числе, т. е. в приближенном числе все цифры должны быть верными, за исключением последней цифры или знака. Например, если абсолютная погрешность при измерении плотности $\Delta\rho = 0,03$ г/см^3, а вычисленное значение $\rho = 2,711$ г-см^3, то нужно записать:

$$\rho = / \, 2,71 \pm 0,03 \, / \text{ г/см}^3.$$

При вычислении абсолютной погрешности мало опытному экспериментпитору нужно ограничится одной цифрой отличной от нуля, т. к. при определении $\Delta\rho$ получилось число 0,0271г/см^3. Поскольку сомнительные сотые доли числа, то тысячные и десятитысячные тем более, поэтому их можно отбросить с учетом правил округления. Следовательно нужно записать

$$\Delta\rho = 0{,}03 \text{ г/см}^3.$$

Вести вычисления с большей точностью, чем это допускают данные задачи, бесмысленно. Выше было указано, что точность результата определяет относительная погрешность. Так, например, если относительная погрешность в определении плотности $E = 1\,\%$, то общее число значащих цифр в результате / независимо от запятой / должно быть не больше трёх, так как

$$\Delta\rho = E\cdot\rho = 0{,}01 \cdot 2{,}711 = 0{,}02711 \text{ г/см}^3,$$

т. е. $\Delta\rho = 0{,}03$ г/см^3, следовательно, $\rho = 2{,}71$ г/см^3.

Если $E = 10\,\%$, то $\Delta\rho = 0{,}3$ г/см^3, а для плотности должны записать

$$\rho = 2{,}7 \text{ г/см}^3.$$

Если $E = 0{,}1\,\%$, то $\Delta\rho = 0{,}003$ г/см^3 и $\rho = 2{,}711$ г-см^3 и т. д.

Следовательно, относительная погрешность определяет число значащих цифр, так для $E = 10\,\%$ число цифр для плотности два, для $E = 1\,\%$ — три, для $E = 0{,}1\,\%$ — четыре и т. д.

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Во многих лабораторных работах формулы для вычисления относительной погрешности имеют более простой вид, чем формулы для вычисления абсолютной погрешности. Поэтому в этих случаях сначала вычисляют относительную погрешность, а потом абсолютную. Для определения относительной погрешности выше была получена формула

$$E = \pm\Delta\left[\ln f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)\right],$$

где Δ — символ, заменяющий дифференциал.

Если определяемая величина представлена в виде произведений и частного непосредственно измеряемых величин в любых степенях, то тогда можно прологарифмировать данное выражени. и дифференциал от него будет относительной погрешностью. Но здесь нужно учитывать, что при определении погрешности всегда рассматривают самый невыгодный случай, поэтому погрешности отдельных измерений берут по абсолютному значению и суммируют.

Пример I. Пусть этой функцией будет коэффициент вязкости жидкости при измерении методом Стокса

$$\eta = f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n),$$

где $$\eta = \frac{1}{18}\,\frac{(\rho-\rho_0)\,g\,d^2 t}{l}\,, \qquad /\,I\,/$$

здесь $X_1 = \rho - \rho_0;\quad X_2 = d;\quad X_3 = t;\quad X_4 = l,$

где ρ — плотность шарика;
ρ_0 — плотность жидкости;
g — ускорение силы тяжести;
d — диамеир шарика;
t — время падения шарика;
l — путь, пройденный шариком в жидкости за время t.

Величина ρ, ρ_0, g — табличные и их погрешности, в данном случае, считаем равными нулю. Непосредственно измеряемые величины являются: d, t, и l. Для нахождения относительной погрешности сначала формулу / I / прологарифмируем, получим:

$$\ln\eta = \ln\frac{1}{18} + \ln(\rho-\rho_0) + \ln g + 2\ln d + \ln t - \ln l,$$

а потом находим дифференциал

$$\Delta\ln\eta = \frac{\Delta\eta}{\eta} = 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta t}{t} - \frac{\Delta l}{l}\,.$$

Выше было указано, что мы рассматриваем самый невыгодный случай, поэтому для относительной погрешности должны записать:

$$\pm E = \pm\frac{\Delta\eta}{\eta} = 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta l}{l}\,,$$

а абсолютная погрешность находится по формуле:

$$\Delta\eta = \pm E\,\eta$$

Здесь относительными погрешностями отдельных измерений являются цена делений приборов. При измерении диаметра шарика при помощи микрометра, получим d = 2,02 мм, то Δd = 0,0I мм. При помощи линейки измерим путь / расстояние / и получим l = 20,5 см, а Δl = 0,I см. Время падения шарика измерим при помощи электрического секундомера, t = I0,02 с и Δt =0,02с. Из таблицы находим плотность свинцового шарика

$$\rho = 11{,}25\cdot10^3 \text{ кг/м}^3,$$

и глицерина*/ $\rho_0 = 1{,}25 \cdot 10^3$ кг/м³. Вычисление η производим в системе СИ.

$$\eta = \frac{/11{,}25-1{,}25/ \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot /2{,}02/^2 \cdot 10^{-6} \cdot 10{,}02}{18 \cdot 0{,}205} = 1{,}06\ \text{Па}\cdot\text{с}.$$

Вычисляем относительную погрешность, но так как она безразмерная величина, то все величины не обязательно выражать в системе СИ.

$$E = 2\frac{0{,}01}{2{,}02} + \frac{0{,}02}{10{,}02} + \frac{1}{205} \cong 0{,}01 + 0{,}002 + 0{,}005 = 0{,}017 \cong 0{,}02.$$

Вычисляем абсолютную погрешность.

$$\Delta\eta = E\eta = 0{,}02 \cdot 1{,}06 = 0{,}0212 = 0{,}02\ \text{Па}\cdot\text{с}.$$

Окончательно должны записать

$$\eta = /\ 1{,}06 \pm 0{,}02\ /\ \text{Па}\cdot\text{с}.$$

Но метод логарифмирования не всегда применим, он ошибочный тогда, когда в формулу входит непосредственно измеряемая величина дважды и больше раз. Например:

$$y = \frac{X_1 + X_2}{X_2}$$

Метод логарифмирования приводит к выражению

$$E = \frac{\Delta y}{y} = \frac{X_2\,\Delta X_1 + X_1\,\Delta X_2 + 2X_2\,\Delta X_2}{/X_1 + X_2/\ X_2},$$

а метод дифференцирования приводит к такому виду:

$$E = \frac{X_2\,\Delta X_1 + X_1\,\Delta X_2}{/X_1 + X_2/\ X_2}.$$

Этот пример показывает, что метод логарифмирования в данном случае не пригоден.

Пример 2. В работе „Определение отношения теплоемкостей газов по способу Клемана и Дезорма" опыт повторяют 7 - 9 раз, находят значения $\gamma = C_p / C_v$ и методом среднего вычисляют погрешности. При отдельных измерениях, допустим, мы получили значения γ, записанные в таблице:

---

*/ Примечание: вязкость глицерина резко убывает с повышением температуры, так при $t = 20°C$ $\eta = 1{,}5$ Пс, а при $t = 30°C$ вязкость убывает в 2,5 раза.

Номер опыта	I	2	3	4	5	6	7
γ	I,37	I,39	I,43	I,45	I,40	I,42	I,36

Находим среднее значение

$$\gamma_{cp} = \frac{I,37 + I,39 + I,43 + I,45 + I,40 + I,42 + I,36}{7} = I,40$$

и погрешности отдельных измерений

$$\Delta\gamma_1 = I,40 - I,37 = 0,03;$$
$$\Delta\gamma_2 = I,40 - I,39 = 0,0I;$$
$$\Delta\gamma_3 = I,40 - I,43 = -0,03;$$
$$\Delta\gamma_4 = I,40 - I,45 = -0,05;$$
$$\Delta\gamma_5 = I,40 - I,40 = 0,00;$$
$$\Delta\gamma_6 = I,40 - I,42 = -0,02;$$
$$\Delta\gamma_7 = I,40 - I,36 = 0,04,$$

а также среднюю погрешность

$$\Delta\gamma_{cp} = \frac{0,03 + 0,0I + 0,03 + 0,05 + 0,02 + 0,04}{7} = 0,026 = 0,03$$

и относительную погрешность

$$E = \frac{\Delta\gamma_{cp}}{\gamma_{cp}} = \frac{0,03}{I,4} = 0,02,$$

значит $E = 2\ \%$.

И окончательно результат запишется

$$\gamma = I,40 \pm 0,03.$$

НЕКОТОРЫЕ СОВЕТЫ И УКАЗАНИЯ.

Так как для выполнения лабораторной работы время ограничено учебными часами, то всю подготовку к выполнению лабораторной работы нужно проделать самостоятельно /литература указана в описании работы/. Нельзя приступать к выполнению лабораторной работы, если в ней что-либо остаётся неясным. Приступая к выполнению лабораторной работы, сначала нужно убедиться, все ли приборы и принадлежности имеются для ее выполнения. Нельзя брать приборы с другой работы, так как они могут быть непригодными для первой работы, хотя по внешнему виду были одинаковы.

Если встречаетесь с измерительными приборами первый раз, то нужно сначала разобраться с принципом их работы.

Если что-либо непонятно по данной работе, то нужно обратиться за консультацией к преподавателю.

СВОДКА ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ДЛЯ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ.

Математическая	Погрешность	
операция	абсолютная	относительная
	Для функции одного переменного	
$y = X^n$	$\pm n X^{n-1} \Delta X$	$\pm n \frac{\Delta X}{X}$
$y = \sqrt[n]{X}$	$\pm \frac{1}{n} X^{\frac{1}{n}-1} \Delta X$	$\pm \frac{1}{n} \frac{\Delta X}{X}$
$y = \sin X$	$\pm \cos X \cdot \Delta X$	$\pm \operatorname{ctg} X \cdot \Delta X$
$y = \cos X$	$\pm \sin X \cdot \Delta X$	$\pm \operatorname{tg} X \cdot \Delta X$
$y = \operatorname{tg} X$	$\pm \frac{\Delta X}{\cos^2 X}$	$\pm \frac{2 \Delta X}{\sin 2X}$
$y = \operatorname{ctg} X$	$\pm \frac{\Delta X}{\sin^2 X}$	$\pm \frac{2 \Delta X}{\sin 2X}$
	Для функций нескольких переменных	
$y = X_1 + X_2 + X_3 \ldots$	$\pm (\Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3 + \ldots$	$\pm \frac{\Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3 + \cdots}{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots}$
$y = X_1 - X_2$	$\pm (\Delta X_1 + \Delta X_2)$	$\pm \frac{\Delta X_1 + \Delta X_2}{X_1 - X_2}$
$y = X_1 \cdot X_2$	$\pm (X_1 \Delta X_2 + X_2 \Delta X_1)$	$\pm \left(\frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2} \right)$
$y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$	$\pm (X_2 X_3 \Delta X_1 + X_1 X_3 \Delta X_2 + X_1 X_2 \Delta X_3)$	$\pm \left(\frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2} + \frac{\Delta X_3}{X_3} \right)$
$y = \frac{X_1}{X_2}$	$\pm \frac{X_2 \Delta X_1 + X_1 \Delta X_2}{X_2^2}$	$\pm \left(\frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2} \right)$