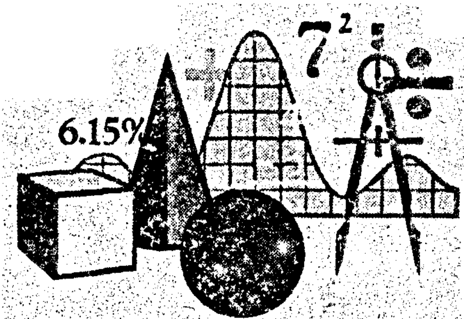
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Брестский политехнический институт
Кафедра высшей математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

по курсу „Высшая математика" для студентов-заочников экономических специальностей

Часть I



Брест 1997

УДК 517.9

В методических указаниях и контрольных заданиях в соответствии с действующей программой для студентов 1 курса экономических специальностей . подобраны индивидуальные задания по каждой из четырех контрольных работ и даны решения типовых вариантов к каждой из них.

Составители: А.И.Тузик, доцент, к.ф.-м.н.
Т.А.Тузик, доцент

Рецензент: Профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений БрГУ И.Г.Кожух

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Методические указания и контрольные задания составлены в соответствии с типовой программой дисциплины "Высшая математика" для студентов вузов по инженерно-экономическим специальностям, утвержденной ГУМУ высшего образования 7 июля 1988 года, индекс ГУМУ-1/2, Москва, 1988.

Основной формой изучения курса высшей математики для студентов-заочников является самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями и сборниками задач и упражнений. Список основных и наиболее доступных из них прилагается в конце пособия. Изучение любого раздела курса следует начинать с рассмотрения соответствующих глав учебника и задачников, в которых приводятся расчетные формулы и решения задач по темам.

После этого посмотрев решение типового варианта к контрольной работе можно приступать к решению самой контрольной работы. Задачи к каждой из контрольных работ выбираются по двум последним цифрам шифра (номера зачетной книжки). В случае необходимости можно обращаться за консультациями к преподавателю кафедры, проверяющему контрольные работы в группе, либо к лектору потока.

1. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

11. Решить систему линейных алгебраических уравнений двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) матричным методом.

11.1 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

11.2 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

11.3 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

11.4 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

11.5 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$

11.6 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

11.7 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases}$

11.8 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20, \\ 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43. \end{cases}$

11.9 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

11.10 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

11.11 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

11.12 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$

11.13 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 13, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7. \end{cases}$

11.14 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$

11.15 $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$

11.16 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

11.17 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

11.24 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

11.18 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases}$

11.25 $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9, \\ 3x_1 + 1x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

11.19 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 11, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

11.26 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

11.20 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

11.27 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases}$

11.21 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4. \end{cases}$

11.28 $\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$

11.22 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 \qquad + 3x_3 = -6, \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16. \end{cases}$

11.29 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 21. \end{cases}$

11.23 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ \qquad 3x_2 - 7x_3 = -6, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$

11.30 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

12. Прямая линия на плоскости.

В каждой из задач сделать чертеж.

12.1. Через точку $M(3,-2)$ провести прямую перпендикулярную прямой $2x - 5y + 7 = 0$.

12.2. Найти расстояние от точки $A(2,1)$ до прямой $3x + 4y - 20 = 0$.

12.3. Вычислить площадь квадрата, две противоположные стороны которого лежат на прямых $6x - 8y - 25 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$.

12.4. Записать уравнения сторон треугольника с вершинами $A(-2, 2)$, $B(-1,2)$, $C(6,2)$.

12.5. Записать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x - 7y - 3 = 0$, $3x + y - 7 = 0$ и параллельной прямой $8x + 3y - 2 = 0$.

12.6. Стороны трапеции лежат на прямых, заданных уравнениями: $4x - y + 6 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$, $2x + 3y - 18 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$. Найти точку пересечения ее диагоналей.

12.7. Составить уравнения двух перпендикуляров к прямой $3x+4y-12=0$, проведенных из точек пересечения ее с осями координат.

12.8. Через точку пересечения прямых $2x + 3y - 5 = 0$, $3x - 4y - 7 = 0$ провести прямую перпендикулярно к прямой $5x + 6y - 1 = 0$.

12.9. Вычислить расстояние между двумя прямыми $12x - 5y - 39 = 0$, $12x - 5y - 65 = 0$.

12.10. Вычислить длину перпендикуляра, проведенного из точки $M(1, 2)$ к прямой $4x + 3y + 10 = 0$.

12.11. Найти проекцию точки $A(-8, 12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2,-3)$ и $C(-5,1)$.

12.12. Даны две вершины треугольника ABC : $A(-4,4)$, $B(4,-12)$ и точка $M(4,2)$ пересечения его высот. Найти вершину C.

12.13. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y - x + 5 = 0$.

12.14. Найти уравнение прямой , проходящей через точку $A(2,-3)$ и точку пересечения прямых $2x - y - 5 = 0$ и $x + y - 1 = 0$.

12.15. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ - трапеция, если $A(3,6)$, $B(5,2)$, $C(-1,-3)$, $D(-5,5)$.

12.16. Записать уравнение прямой , проходящей через точку $A(3,1)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(2,5)$, $C(1,0)$.

12.17. Найти уравнение прямой , проходящей через точку $A(-2,1)$ параллельно прямой MN, если $M(-3,-2)$, $N(1,6)$.

12.18. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1,-3)$, $B(3,5)$, $C(5,2)$, $D(3,-5)$.

12.19. Через точку пересечения прямых $6x - 4y + 5 = 0$, $2x + 5y + 8 = 0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс.

12.20. Известны уравнения стороны (AB): $4x + y - 12 = 0$ треугольника ABC, его высот (BH): $5x - 4y - 12 = 0$ и (AM): $x + y - 6 = 0$. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC.

12.21. Найти уравнения высот треугольника ABC , проходящих через вершины A и B, если $A(-4,2)$, $B(3,-5)$, $C(5,0)$.

12.22. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров , проведенных через середины сторон треугольника , вершинами которого служат точки $A(2,3)$, $B(0,-3)$, $C(6,-3)$.

12.23. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину A треугольника ABC, зная уравнения его сторон (AB): $2x-y-3=0$, (AC): $x+5y-7=0$, (BC): $3x-2y+13=0$.

12.24. Известны уравнения двух сторон ромба $2x-5y-1=0$ и $2x-5y-34=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x+3y-6=0$. Найти уравнение второй диагонали.

12.25. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x+5y-8=0$ и $2x+3y+4=0$.

12.26. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x-y=0$; $x+3y=0$; $x-y-4=0$; $3x+y-12=0$. Найти уравнения его диагоналей.

12.27. Составить уравнения медианы CM и высоты CK треугольника ABC, если $A(4,6)$, $B(-4,0)$, $C(-1,-4)$.

12.28. Какую ординату имеет точка C, лежащая на одной прямой с точками $A(-6,6)$, $B(-3,-1)$ и имеющая абсциссу, равную 3.

12.29. Дан треугольник с вершинами $A(3,1)$, $B(-3,-1)$, $C(5,-12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C.

12.30. Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3,1)$, $B(7,5)$, $C(5,-3)$.

13. Найти пределы функций.

13.1 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x+2}{7x^3-2x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3+2x-15}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos7x}{x^2}$.

13.2 а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-4x^2+1}{4x^3+7x}$; б) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+x-12}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin5x-\sin x}{3x}$.

13.3 а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4-3x^2+6}{2x^4-x^3+x}$; б) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2+2x-3}{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos5x-\cos x}{3x^2}$.

13.4 а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+5}{7x^2+3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2+3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}3x}$.

13.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-x^2+17x}{5x^3+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{x^2+5x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{2x^2}$.

13.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-7x+3}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x^2-2x-8}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\arcsin 3x}{\sin 5x}$.

13.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^4+5x^2-x}{x^4+5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2x^2-5x-7}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\cdot tg\,\dfrac{\pi x}{2}$.

13.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-4x+3}{2x^2+7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}{2x^2-7x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\pi-2x}{1-\sin x}$.

13.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x+2}{3x^2+x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2-9x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg3x - \sin 3x}{x^2}$.

13.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-3x^2+10}{7x^3+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2 - 75}{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+22}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\, tgx}{1-\cos^2 x}$.

13.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-5x+7}{2x^2+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+1} - 1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{x^3-8}$.

13.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+x+1}{2x^4+x^3+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9-x} - \sqrt{9+x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 5x - \sin^2 x}{x^2}$.

13.13. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2x+9}{2x^3-4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 8x}$.

13.14. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+7x-3}{3x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{3x^2}$.

13.15. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7x+2}{3x^3-x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{8-x} - 3}{\sqrt{5+x} - 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{2x^2}$.

13.16. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 5x}{8-3x-9x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{x+4} - 3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

13.17. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+6x^2-2}{x^4-4x+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x-3}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x-\operatorname{tg} 2x}{3x^2}$.

13.18. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2-4x+5}{2-3x+4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{5x-6}-3}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$.

13.19. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^4+4x^2-3}{2x^4-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{5x^2}$.

13.20. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x+1}{1+5x+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{5x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1}$.

13.21. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3-3x}{x^3+4x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+4}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{3x^2}$.

13.22. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+4x-x^4}{x-5x^2+2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{\arcsin 3x}$.

13.23. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-5x^2+3}{6x^3-7x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x+7}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{27-x^3}$.

13.24. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-14x^2}{1+5x+7x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{2-\sqrt{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos 4x}$.

13.25. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2x^2+3x^4}{2-x^2+5x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x}-x}{x^3-27}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 5x-\cos x}{3x^2}$.

13.26. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-2x^2+7}{3x^4-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2-5x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x+\sin 5x}$.

13.27. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+2x+3}{2-3x+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{x^3+64}{\sqrt{x+20}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^4(2x)}{x^4}$.

13.28. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x+1}{5x^2-x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{8+x}-3}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

13.29. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-7x+3}{4+2x^2-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos^3x-\cos x}{5x^2}$.

13.30. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-2x^2-3x^5}{x^5+2x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{4-\sqrt{x+16}}$;

в) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{2x^2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

14. Исследовать функции на непрерывность и построить их графики.

14.1. $f(x)=\begin{cases} x+5, & x<-1, \\ x^2+3, & -1\leqslant x<1, \\ 2x, & x\geqslant 1. \end{cases}$

14.2. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ (x+1)^2, & 0<x\leqslant 2, \\ -x+5, & x>2. \end{cases}$

14.3. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x\leqslant -1, \\ x^2+1, & -1<x\leqslant 1, \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

14.4. $f(x)=\begin{cases} 2x-3, & x\leqslant 0, \\ -(x-1)^2, & 0<x<2, \\ x-3, & x\geqslant 2. \end{cases}$

14.5. $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\leqslant -1, \\ (x+1)^3, & -1<x<0, \\ x-1, & x\geqslant 0. \end{cases}$

14.6. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\leqslant 0, \\ x^2, & 0<x\leqslant 2, \\ 2x-3, & x>2. \end{cases}$

14.7. $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\leqslant 1, \\ x^2-3, & 1<x\leqslant 3, \\ -3x+5, & x>3. \end{cases}$

14.8. $f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0, \\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 4, \\ 9-x, & x>4. \end{cases}$

14.9. $f(x)=\begin{cases} x^3-1, & x<0, \\ 0, & 0<x<2, \\ x-2, & x>2. \end{cases}$

14.10. $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x<0, \\ -x, & 0<x<1, \\ 2+x, & x>1. \end{cases}$

14.11. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x, & 0<x<2, \\ 3-x, & x>2. \end{cases}$

14.12. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x<\pi/2 \\ 0, & \pi/2<x<\pi, \\ 3, & x>\pi \end{cases}$

14.13. $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & x<0, \\ x^2, & 0<x<2, \\ 2x+1, & x>2. \end{cases}$

14.14. $f(x)=\begin{cases} 5x+2, & x<0, \\ x^2-1, & 0<x<1, \\ 1-x, & x>1. \end{cases}$

14.15. $f(x)=\begin{cases} -x+1, & x<0, \\ x^2+1, & 0<x<2, \\ 2x-3, & x>2. \end{cases}$

14.16. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x<0, \\ 3-x, & 0<x<2, \\ x^2-2, & x>2. \end{cases}$

14.17. $f(x)=\begin{cases} -2x, & x<0, \\ \sin x, & 0<x<\pi, \\ 2, & x>\pi. \end{cases}$

14.18. $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 < x < 2, \\ 2x-1, & x > 2. \end{cases}$

14.19. $f(x)=\begin{cases} 1, & x < 0, \\ 2^x, & 0 < x < 2, \\ 3x-4, & x > 2. \end{cases}$

14.20. $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x < -2, \\ x^3, & -2 < x < 1, \\ 4x-3, & x > 1. \end{cases}$

14.21. $f(x)=\begin{cases} 3x+5, & x < -1, \\ x^2-2, & -1 < x < 2, \\ x, & x > 2. \end{cases}$

14.22. $f(x)=\begin{cases} x, & x < 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x < 3, \\ 5-x, & x > 3. \end{cases}$

14.23. $f(x)=\begin{cases} 4x-1, & x < 1, \\ x^2+2, & 1 < x < 2, \\ -2x, & x > 2. \end{cases}$

14.24. $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & x < -1, \\ x-1, & -1 < x < 3, \\ 5-x, & x > 3. \end{cases}$

14.25. $f(x)=\begin{cases} 2x, & x < -2, \\ 1-x, & -2 < x < 1, \\ x^2-1, & x > 1. \end{cases}$

14.26. $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & x < 0, \\ -x^2+4, & 0 < x < 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$

14.27. $f(x)=\begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ x^2-1, & -1 < x \leqslant 2, \\ 2x-5, & x > 2. \end{cases}$

14.28. $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -1, & x > \pi. \end{cases}$

14.29. $f(x)=\begin{cases} 3, & x < -1, \\ 1-x, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$

14.30. $f(x)=\begin{cases} -x, & x \leqslant 0, \\ x^3, & 0 < x \leqslant 2, \\ 2x+2, & x > 2. \end{cases}$

15. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ N 1

15.1. Решить систему линейных алгебраических уравнений двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) матричным методом.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18, \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39. \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c} 3 & 5 \\ 2 & \\ & 2 \end{array} \qquad (1.1)$$

1) Решение системы методом Гаусса.

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение умножим на 3, второе на 2, уравнивая тем самым коэффициенты при x_1 в обоих уравнениях и затем из первого уравнения вычтем второе. Аналогично, уравнивая коэффициенты при x_1 в первом и третьем уравнениях и вычитая из первого уравнения третье получим

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ \quad - 7x_2 + 15x_3 = -36, \\ \quad -15x_2 + 33x_3 = -78. \end{cases}$$

Коэффициенты последнего уравнения сократим на 3, получим

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ \quad - 7x_2 + 15x_3 = -36, \\ \quad - 5x_2 + 11x_3 = -26. \end{cases} \left| \begin{matrix} \\ 5 \\ 7 \end{matrix} \right.$$

Далее уравнивая во втором и третьем уравнениях коэффициенты при x_2 и вычитая из второго уравнения третье будем иметь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ \quad - 7x_2 + 15x_3 = -36, \\ \quad\quad - 2x_3 = 2 . \end{cases}$$

На этом прямой ход метода Гаусса закончен. В результате обратного хода получим.

$x_3 = -1$,

$-7x_2 + 15(-1) = -36 \quad \Leftrightarrow \quad -7x_2 = -21 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 3.$

$2x_1 + 7 \cdot 3 + 13(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + 21 - 13 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 = -8 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -4$

Итак решение данной системы таково:

$x_1 = -4, \; x_2 = 3, \; x_3 = -1.$

2) Решение системы матричным методом.

Введем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{pmatrix} \; ; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; ; \; D = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1.1) $\Leftrightarrow$ $AX = D$.

Вычислим по правилу треугольников определитель матрицы A.

$$\Delta(A) = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{vmatrix} = 2\cdot 14\cdot 16 + 7\cdot 12\cdot 5 + 3\cdot 25\cdot 13 -$$

$$-13\cdot 4\cdot 5 - 12\cdot 25\cdot 2 - 3\cdot 7\cdot 16 = 448+420+975-910-600-336 = -3 \neq 0$$

т.е. матрица A невырожденная, значит существует обратная матрица A^{-1}. Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 25 & 16 \end{vmatrix} = -76, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 25 & 16 \end{vmatrix} = 213, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} = -33, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = -15,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 12 \end{vmatrix} = -98, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 15, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = 7.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -76 & 213 & -98 \\ 12 & -33 & 15 \\ 5 & -15 & 7 \end{pmatrix},$$

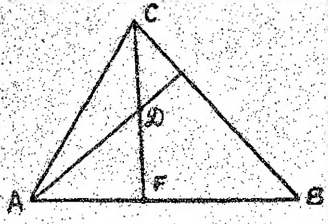
$$X = A^{-1}D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -76 & 213 & -98 \\ 12 & -33 & 15 \\ 5 & -15 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 39 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 + 3834 - 3822 \\ 0 - 594 + 585 \\ 0 - 270 + 273 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Значит $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

15.2. Даны две вершины $A(-3;3)$ и $B(5,-1)$ и точка $D(4,3)$ пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

Решение. Сделаем сначала схематический чертеж



Составим уравнение прямой AB, проходящей через две заданные точки

$$(AB):\ \frac{x+3}{5+3}=\frac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow \frac{x+3}{8}=\frac{y-3}{-4} \Leftrightarrow x+3=-2(y-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{x+2y-3=0}. \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{3} \Rightarrow K_{AB}=-\frac{1}{2}.$$

Аналогично, составим уравнение прямой AD

$$(AD):\ \frac{x+3}{4+3}=\frac{y-3}{3-3} \Rightarrow \underline{y=3.}$$

Составим уравнение прямой BC, проходящей через точку $B(5,-1)$ перпендикулярно прямой AD. Учитывая, что прямая AD параллельна оси OX, заключаем, что ее уравнение имеет вид.

$$(BC):\ \underline{x=5}$$

Прямая CF проходит через точку $D(4,3)$ перпендикулярно прямой AB. Поэтому

$$K_{CF}=-\frac{1}{K_{AB}}=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2,$$

$$(CF):\ y-3=2(x-4) \Leftrightarrow \underline{2x-y-5=0.}$$

Для нахождения координат точки C решим совместно уравнения прямых BC и CF.

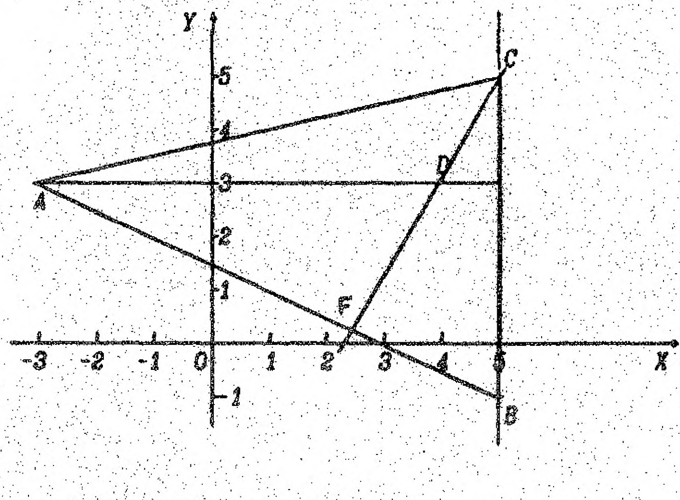
$$\begin{cases} x = 5, \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5,\ y = 5 \Rightarrow C(5,5).$$

Уравнение стороны AC получим как уравнение прямой, проходящей через две точки

$$(AB): \frac{x-5}{-3-5} = \frac{y-5}{3-5} \Leftrightarrow \frac{x-5}{-8} = \frac{y-5}{-2} \Leftrightarrow x - 5 = 4(y-5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{x - 4y + 15 = 0}\ .$$

Зная уравнения всех сторон построим искомый треугольник в прямоугольной системе координат.



15.3. Найти пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{4x^2+2x+3}$

При $x\to\infty$ числитель и знаменатель неограниченно возрастают, получаем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Чтобы найти предел, преобразуем данную дробь, разделив ее числитель и знаменатель на старшую степень многочленов в числителе и знаменателе т.е. на x^2. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+1}{4x^2+2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{3-0+0}{4+0+0}=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

б) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

При $x\to7$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Одним из приемов раскрытия такой неопределенности является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот, что позволит сократить множители, стремящиеся к нулю при $x\to7$. Избавимся от иррациональности в числителе, умножая числитель и знаменатель на $(2+\sqrt{x-3})$. Получим

$$\lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim_{x\to7}\frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}=\lim_{x\to7}\frac{4-(x-3)}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=-\lim_{x\to7}\frac{1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=-\frac{1}{56}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$

При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия такой неопределенности, ввиду наличия тригонометрической функции, используем первый замечательный предел.

$$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3}{2}x}{x}\right)^2 =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}\right)^2 = 2\cdot\frac{9}{4}\cdot 1^2 = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

15.4. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1, \\ 2x, & 1<x\leq 3, \\ x+2, & x>3. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty, 1)$, $(1,3)$ и $(3,+\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1=1$, $x_2=3$. Для точки $x_1=1$ вычислим:

$$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+1)=2;$$

$$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} 2x = 2;$$

$$f(1) = (x^2+1)\Big|_{x=1}=2.$$

$f(1-0)=f(1+0)=f(1)$, следовательно, $x_1=1$ точка непрерывности для $f(x)$.

Для точки $x_2=3$ находим:

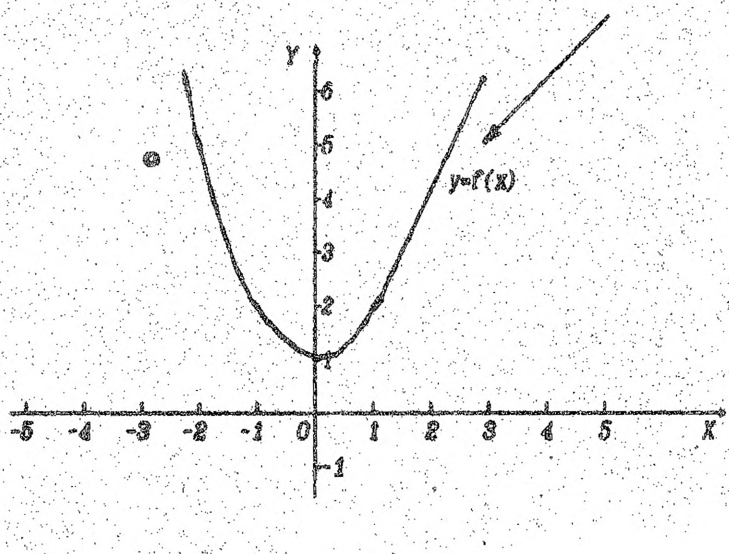
$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0} 2x=6;$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0} (x+2)=5;$$

$$f(3)=2x\Big|_{x=3}=6$$

$f(3-0)\neq f(3+0)$, следовательно $x_2=3$ точка разрыва I рода для $f(x)$.

График данной функции имеет вид



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

21. Найти производную y' следующих функций:

21.1 а) $y = \sqrt[3]{x^7} + \dfrac{3}{x^7} - 4x^6 + \dfrac{4}{x^5}$;

б) $y = (x^3+4)\cdot tg^2 3x$; в) $y = \dfrac{7x^2+3x-4}{5x^3+4x^2+3}$;

21.2 а) $y = 3x^6 + \dfrac{5}{x} - \sqrt{x^7} + \dfrac{7}{x^4}$;

б) $y = (x-2)^4\cdot \sin 3x$; в) $y = \dfrac{(x+1)^3}{x(2x+7)}$;

21.3 а) $y = 5x^3 - \dfrac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$;

б) $y = (2-x^2)\cdot tg^3 x$; в) $y = \dfrac{(x^3+1)(4+x)}{8x^2+2x+1}$;

21.4 а) $y = 2x^5 - \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{6}{x} + 3\sqrt{x}$;

б) $y = (x^2-3x)\cdot \cos 4x$; в) $y = \dfrac{x^4+3x^3-2}{(x^2+4x+3)(x-1)}$;

21.5 а) $y = 3x^4 + \sqrt[5]{x^3} - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^3}$;

б) $y = (x^2+3x)\cdot tg\sqrt{x}$; в) $y = \dfrac{(x+4)^2(4x+1)}{6x^3+7x+4}$;

21.6 а) $y = \sqrt[7]{x^5} - \dfrac{2}{x^5} - 3x^4 + \dfrac{4}{x}$;

б) $y = cox^3 5x - x \sin 3x$; в) $y = \dfrac{(5x+3)(4x+2)}{9x^2-7x-3}$;

21.7 а) $y = \dfrac{4}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 3x^6 + \dfrac{2}{x^4}$;

б) $y = \cos 2x \cdot \operatorname{ctg} x^2$; в) $y = \dfrac{3x^2-8x+5}{(x+1)(4x+5)}$;

21.8 а) $y = 8x^2 + \dfrac{6}{x^3} - \sqrt[6]{x^5} + \dfrac{5}{x}$;

б) $y = (x^5-4x) \cdot \cos 7x$; в) $y = \dfrac{(x-8)(x+8)}{(x+2)^2}$;

21.9 а) $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{3}{x}$;

б) $y = (x-7)^6 \cdot \operatorname{ctg} 3x$; в) $y = \dfrac{(3x-1)(x+2)}{(x+3)^2}$;

21.10 а) $y = 3x^5 - \dfrac{4}{x} + \sqrt{x^5} + \dfrac{10}{x^5}$;

б) $y = (x+5)^3 \cdot \sin^2 x$; в) $y = \dfrac{(x+1)(4x-1)}{(x-4)(x-1)}$;

21.11 а) $y = 5x^3 - \dfrac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$;

б) $y = (2-\sin x)\cdot(2x-1)^3$; в) $y = \dfrac{(6x-1)(x+2)}{(3x+1)^2}$;

21.12 а) $y = 4x^4 - \dfrac{3}{x} - \sqrt[5]{x^2} + \dfrac{6}{x^2}$;

б) $y = (x-9)^3\cdot\cos\sqrt{x}$; в) $y = \dfrac{(x-2)(x+6)}{(7x+1)^2}$;

21.13 а) $y = 2\sqrt{x^3} + \dfrac{7}{x} - 6x^2 + \dfrac{2}{x^5}$;

б) $y = (x^2-9x)\cdot\sin 7x$; в) $y = \dfrac{(x+4)^2+(1-6x)}{(x+2)^2}$;

21.14 а) $y = 6x^4 - \dfrac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} + \dfrac{7}{x^2}$;

б) $y = \sin 6x\cdot\cos^2 4x$; в) $y = \dfrac{(x+7)(x-3)}{x^2+4x+2}$;

21.15 а) $y = 4x^3 - \dfrac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} + \dfrac{2}{x^4}$;

б) $y = (x^2-3x+1)\cdot\ln(x-3)$; в) $y = \dfrac{(x+3)(x+5)}{x^2-5x+6}$;

21.16 а) $y = 4x^5 - \dfrac{5}{x} - \sqrt{x^7} + \dfrac{2}{x^6}$;

б) $y = \ln(x+4)\cdot tg^2x$; в) $y = \dfrac{(x-4)^2}{7x^2-6x+1}$;

21.17 а) $y = \dfrac{7}{x} + \dfrac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^5} - 2x^6$;

б) $y = \sqrt{x^2-1}\cdot\sin 6x$; в) $y = \dfrac{(x+7)(x-3)^2}{(x+2)(x-1)}$;

21.18 а) $y = \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}$;

б) $y = \sqrt[3]{6x+1}\cdot\cos^2x$; в) $y = \dfrac{(x+3)^2(x+2)}{(x-1)(x-2)}$;

21.19 а) $y = 8x^3 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{7}{x^4} + \sqrt[9]{x^{11}}$;

б) $y = (x-5)^3\cdot tg^2x$; в) $y = \dfrac{(x-1)(x+2)}{3x^2-6x+8}$;

21.20 а) $y = 3x^5 - \dfrac{5}{x^4} + \dfrac{1}{x} - \sqrt[4]{x^5}$;

б) $y = \sqrt{(x+1)^5}\cdot\ln(3x-1)$; в) $y = \dfrac{(x-7)(3x+2)}{(2x+1)(x-1)}$;

21.21 а) $y = \sqrt[4]{x^6} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^5} + 3x^4;$

б) $y = tg^3x \cdot \sin 2x;$ в) $y = \dfrac{(x+4)(4x-1)}{6x^2+2x+7};$

21.22 а) $y = 4x^3 + \dfrac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \dfrac{4}{x^4};$

б) $y = \sqrt[5]{(x+4)^3} \cdot \sin 6x;$ в) $y = \dfrac{(x+1)(6x-1)}{2x^2+x+1};$

21.23 а) $y = 7x^4 + \dfrac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \dfrac{8}{x^6};$

б) $y = \sqrt{(3x+6)^3} \cdot ctg 4x;$ в) $y = \dfrac{(x+4)(x+2)}{4x^2-6x+1};$

21.24 а) $y = \sqrt[5]{x^4} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{x^5} - 5x^3;$

б) $y = \sin^3 4x \cdot \ln x;$ в) $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(5x-3)};$

21.25 а) $y = 3\sqrt{x} + \dfrac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{7}{x};$

б) $y = e^{2x} \cdot \cos 6x;$ в) $y = \dfrac{(x-2)(2-6x)}{(x+8)(x+5)};$

21.26 а) $y = 9x^5 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}$;

б) $y = (x^4+3x^2)\cdot \sin 3x$; в) $y = \dfrac{(x+1)^2}{(3x+1)(x-4)}$;

21.27 а) $y = \sqrt[4]{x^3} - \dfrac{6}{x} + \dfrac{4}{x^5} - 3x^7$;

б) $y = (3x-4)^2\cdot tg3x$; в) $y = \dfrac{4x+7}{(6x+8)(6x+1)}$;

21.28 а) $y = 10x^4 + 3\sqrt{x^5} - \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{x^4}$;

б) $y = tg\sqrt{x}\cdot\cos 8x$; в) $y = \dfrac{(2x+5)(x-4)}{3x+6}$;

21.29 а) $y = 5x^3 + \dfrac{6}{x} - \sqrt[3]{x^8} + 6x^{-3}$;

б) $y = (2x+1)^3\cdot x\ln 4x$; в) $y = \dfrac{3x^2+6x+5}{4x^2-7x+2}$;

21.30 а) $y = \dfrac{9}{x^3} + \dfrac{5}{x} - 5x^4 + \sqrt[6]{x^5}$;

б) $y = \sqrt{(3x+4)}\cdot e^{2x}$; в) $y = \dfrac{x-3x^2}{(x+3)(x^2-4)}$;

22. Найти y' и y'' следующих функций:

22.1. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$

22.2. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

22.3. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

22.4. $\begin{cases} x = 6t - t^2 \\ y = 4t^2 \end{cases}$

22.5. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}$

22.6. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sin t} \\ y = \operatorname{ctg} t \end{cases}$

22.7. $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$

22.8. $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$

22.9. $\begin{cases} x = 2t^2 + 3 \\ y = 3t^3\cos t \end{cases}$

22.10. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+2} \\ y = \dfrac{t}{(t+2)^2} \end{cases}$

22.11. $\begin{cases} x = \ln\cos t \\ y = \ln\sin t \end{cases}$

22.12. $\begin{cases} x = \cos 8t \\ y = 4\sin 8t \end{cases}$

22.13. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$

22.14. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \cos t \end{cases}$

22.15. $\begin{cases} x = e^t + 3 \\ y = e^{3t} \end{cases}$

22.16. $\begin{cases} x = 4t + 2t^2 \\ y = 5t^3 - 3t^2 \end{cases}$

22.17. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t\ (1+t^2) \end{cases}$

22.18. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

22.19. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

22.20. $\begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = e^{6t} \end{cases}$

22.21. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \sqrt{(t-1)^2} \end{cases}$

22.22. $\begin{cases} x = t\, e^t \\ y = \dfrac{t}{e^t} \end{cases}$

22.23. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1} \\ y = (t^2+1) \sqrt{t^2-1} \end{cases}$

22.24. $\begin{cases} x = t^4 \\ y = \ln 3\ t \end{cases}$

22.25. $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 3 \sin^2 t \end{cases}$

22.26. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

22.27. $\begin{cases} x = 6t + 3t^2 \\ y = 5t^3 - 2t^2 \end{cases}$

22.28. $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1 + t^2} \end{cases}$

22.29. $\begin{cases} x = \ln^2 t \\ y = t + \ln t \end{cases}$

22.30. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

23. Вычислить эластичность данных функций при заданных значениях x:

23.1. $y = \dfrac{e^{2x+3}}{\sqrt{x+5}}$ при $x = 1$ и $x = 2$

23.2. $y = \dfrac{e^{-x^2}}{x^2+5x-1}$ при $x = 2$ и $x = 3$

23.3. $y = \dfrac{7x^2-5x+2}{e^{\cos x}}$ при $x = 2$ и $x = 4$

23.4. $y = \dfrac{e^{3x+1}}{(x-5)^6}$ при $x = 1$ и $x = 3$

23.5. $y = \dfrac{x^2+4x-5}{e^{x^2}}$ при $x = 2$ и $x = 5$

23.6. $y = \dfrac{3+2x-x^2}{e^{3x}}$ при $x = 4$ и $x = 6$

23.7. $y = \dfrac{e^{2x+1}}{x^2+6x+2}$ при $x = 1$ и $x = 3$

23.8. $y = \dfrac{4x^2+3x+5}{e^{3x+2}}$ при $x = 2$ и $x = 3$

23.9. $y = \dfrac{e^{-4x}}{(2x-5)^2}$ при $x = 4$ и $x = 10$

23.10. $y = \dfrac{2x^2-x+4}{e^{4x}}$ при $x = 3$ и $x = 6$

23.11. $y = \dfrac{e^{5x-2}}{(3x-5)^2}$ при $x = 2$ и $x = 4$

23.12. $y = \dfrac{6x^2+9x+2}{e^{2x}}$ при $x = 1$ и $x = 3$

23.13. $y = \dfrac{e^{\sin x}}{(3x-2)^2}$ при $x = 1$ и $x = 2$

23.14. $y = \dfrac{e^{-x^2}}{(2x-5)^2}$ при $x = 3$ и $x = 4$

23.15. $y = \dfrac{-5x^2+4x+2}{e^{-x}}$ при $x = 0$ и $x = 2$

23.16. $y = \dfrac{(2x-3)^2}{e^{-2x}}$ при $x = 1$ и $x = 3$

23.17. $y = \dfrac{e^{4x}}{(3x+5)^2}$ при $x = 2$ и $x = 3$

23.18. $y = \dfrac{3x^2+4x-2}{e^{2x}}$ при $x = 1$ и $x = 4$

23.19. $y = \dfrac{x^2-3x+7}{e^{-x^2}}$ при $x = 1$ и $x = 3$

23.20. $y = \dfrac{e^{-4x-3}}{4x^2+7x-5}$ при $x = 2$ и $x = 4$

23.21. $y = \dfrac{6x^2+x+7}{e^{-2x+3}}$ при $x = 1$ и $x = 5$

23.22. $y = \dfrac{e^{2x+5}}{3x^2+6x+1}$ при $x = 2$ и $x = 5$

23.23. $y = \dfrac{e^{x-3}}{4x^2+8x+9}$ при $x = 1$ и $x = 4$

23.24. $y = \dfrac{(x-4)^2}{e^{\cos x}}$ при $x = 1$ и $x = 4$

23.25. $y = \dfrac{e^{-5x+2}}{3x^2-4x+2}$ при $x = 2$ и $x = 3$

23.26. $y = \dfrac{e^{1-3x}}{3x^2-x+7}$ при $x = 1$ и $x = 4$

23.27. $y = \dfrac{2x^2-3x+1}{e^{6x+4}}$ при $x = 3$ и $x = 6$

23.28. $y = \dfrac{e^{7x-3}}{4x^2-5x+2}$ при $x = 2$ и $x = 5$

23.29. $y = \dfrac{e^{5x+3}}{x^2-5x+4}$ при $x = 3$ и $x = 6$

23.30. $y = \dfrac{3x^2-5x+10}{e^{x^2}}$ при $x = 2$ и $x = 7$

24. Исследовать функцию на экстремум, построить ее график:

24.1. $y=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-1$

24.2. $y = x^4-8x^3+16x^2+3$

24.3. $y = \dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x-1$

24.4. $y = x\ln^2 x$

24.5. $y = (x+2)^3-3x+1$

24.6. $y = (x+2)^3-27x+3$

24.7. $y = \dfrac{x^4}{4}-2x^3+4x^2$

24.8. $y = (x-4)^3-27x+30$

24.9. $y = x^3-5x^2+3x-2$

24.10. $y = x^3-5x^2+3x-5$

24.11. $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 + 6$

24.12. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

24.13. $y = (x-2)^3 - 12x - 1$

24.14. $y = x^3 + x^2 - x + 6$

24.15. $y = (x+1)^3 - 3x + 4$

24.16. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

24.17. $y = (x+2)^3 - 27x - 4$

24.18. $y = 4x^3 - 15x^2 - 18x + 2$

24.19. $y = (x+3)^3 - 3x - 14$

24.20. $y = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 2$

24.21. $y = \dfrac{e^x}{x}$

24.22. $y = x^3 - 2x^2 + x - 5$

24.23. $y = 3x^4 - 15x^3 + 2$

24.24. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 6$

24.25. $y = (x-1)^3 - 12x + 15$

24.26. $y = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 4$

24.27. $y = x^3 - 6x + 7$

24.28. $y = (x^2 - 2x)\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$

24.29. $y = (x-2)^3 - 3x + 14$

24.30. $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 12$

25. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ N 2.

25.1.

При нахождении производной заданных функций следует пользоваться таблицей производных основных элементарных функций правилами дифференцирования и теоремой о дифференцировании сложной функции. Приведем некоторые формулы таблицы:

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
2. $(a^x)' = a^x \ln a$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Правила:

1. $(C)' = 0$, $C = const$,
2. $(Cu(x))' = Cu'(x)$,
3. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$,
4. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$,
5. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$, $\quad v(x) \neq 0$.

Если $y = f(\varphi(x))$, т.е. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ - сложная функция, то $y'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x)$.

Найти y':

а) $y = \sqrt[4]{x^9} + \dfrac{8}{x} - 5x^7 + \dfrac{10}{x^6}$, $\quad y' = (x^{9/4} + 8\cdot x^{-1} - 5x^7 + 10x^{-6})' =$

$$= \frac{9}{4}x^{5/4} + 8\cdot(-1)x^{-2} - 35x^6 + 10\cdot(-6)x^{-7} = \frac{9}{4}\cdot x\cdot\sqrt[4]{x} - \frac{8}{x^2} - 35x^6 - \frac{60}{x^7}.$$

б) $y = (x^3 - 4x^2 + 6)\cdot\sin 7x$, $\quad y' = (x^3-4x^2+6)'\cdot\sin 7x + (x^3-4x^2+6)\cdot(\sin 7x)' =$

$$= (3x^2-8x)\cdot\sin 7x + 7(x^3-4x^2+6)\cdot\cos 7x.$$

в) $y = \dfrac{3x^2+4x+7}{(2x+3)(3x-1)} = \dfrac{3x^2+4x+7}{6x^2+7x-3}$; $\quad y' = \dfrac{(3x^2+4x+7)'\cdot(6x^2+7x-3) -}{(6x^2+7x-3)^2}$

$$\frac{-(3x^2+4x+7)(6x^2+7x-3)'}{} = \frac{(6x+4)(6x^2+7x-3)-(3x^2+4x+7)(12x+7)}{(6x^2+7x-3)^2} =$$

$$= \frac{36x^3+42x^2-18x+24x^2+28x-12-36x^3-21x^2-24x^2-28x-84x-49}{(6x^2+7x-3)^2} =$$

$$= \frac{21x^2-102x-61}{(6x^2+7x-3)^2}.$$

25.2. При дифференцировании функции, заданной параметрически, следует пользоваться формулами:

$$\text{если } \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \text{ то } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$$

Пример. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = t^3 + t^2 + 1 \end{cases}$

$$x'_t = \left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}, \quad y'_t = 3t^2+2t, \quad y'_x = \frac{3t^2+2t}{-1/t^2} = -t^2(3t^2+2t)$$

$$y''_{xx} = (-3t^4-2t^3)' \cdot \frac{1}{x'_t} = (-12t^3-6t^2)\cdot(-t^2) = 12t^5+6t^4 = 6t^4(2t+1)$$

25.3. Эластичность функции $y = f(x)$ относительно переменной x определяется по формуле

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\, y'.$$

Эластичность $E_x(y)$ показывает приближенный процентный прирост функции y (повышение или понижение) соответствующий при заданном x приращению независимой переменной на 1%.

Пример. Найти $E_x(y)$, если $y = \dfrac{e^{\sin 2x}}{x^2+4x+5}$ при $x=2$ и $x=2,5$.

$$y' = \frac{(e^{\sin 2x})'(x^2+4x+5) - e^{\sin 2x}(x^2+4x+5)'}{(x^2+4x+5)^2} =$$

$$= \frac{e^{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x\,(x^2+4x+5) - e^{\sin 2x}(2x+4)}{(x^2+4x+5)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2+4x+5)\cos 2x - 2(x+2)}{(x^2+4x+5)^2}\, e^{\sin 2x}$$

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\cdot y' = \frac{2x\,((x^2+4x+5)\cos 2x - (x+2))}{x^2+4x+5}$$

$$x = 2 \qquad E_x(y) = \frac{4(17\cos 4 - 4)}{4 + 8 + 5} = -3{,}56$$

$$x = 2{,}5 \qquad E_x(y) = \frac{5(21{,}25\cos 5 - 4{,}5)}{6{,}25 + 15} = 0{,}36$$

При $x = 2$ $E(y) = -3{,}56$. Это значит, что если x возрастет на 1 %, то y уменьшится на 3,56 %.

При $x = 2{,}5$ $E(y) = 0{,}36$. Если x возрастает на 1%, то y возрастает на 0,36 %.

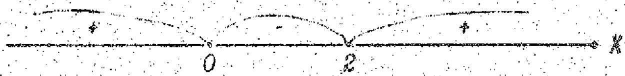
25.4. Исследуем функцию $y = (x-1)^3 - 3x + 4$ на экстремум и построим ее график.

Областью определения функции является вся числовая прямая: $-\infty < x < \infty$.

Находим первую производную, приравниваем ее нулю.

$$y' = 3(x-1)^2 - 3 \qquad 3(x-1)^2 - 3 = 0 \qquad (x-1)^2 = 1$$

$$x - 1 = \pm 1 \qquad x = 1 \pm 1 \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$



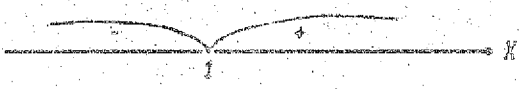
Отметим знак производной на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, +\infty)$.

$$y'(-1) = 3(-2)^2 - 3 = 12 - 3 > 0, \quad y'(1) = -3 < 0, \quad y'(3) = 12 - 3 > 0.$$

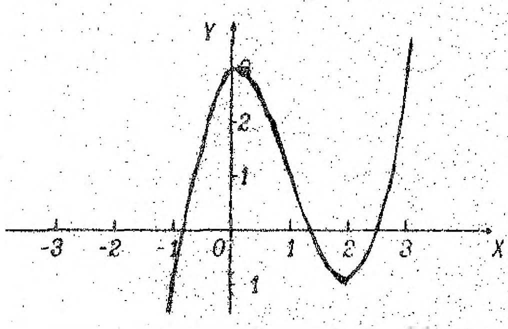
На интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$ функция возрастает, а на интервале $(0, 2)$ - убывает.

$$y_{max}(0) = -1 + 4 = 3, \qquad y_{min}(2) = 1 - 6 + 4 = -1.$$

Находим $y'' = 6(x-1)$, $y'' = 0$ при $x = 1$.



На интервале $(-\infty, 1)$ $y'' < 0$, значит функция выпукла, на интервале $(1, +\infty)$ $y'' > 0$, функция вогнута, $M_0\,(1;1)$ - точка перегиба графика.



$y(-1) = -8+3+4 = -1$
$y(3) = 8-9+4 = 3$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3.

31. Найти неопределенные интегралы следующих функций:

31.1. a) $\int\left(3x^6 + \frac{4}{x} + \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{x^4}\right)dx;$ b) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

31.2. a) $\int\left(5x^3 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)dx;$ b) $\int(2x-3)\sin 4x\,dx$

31.3. a) $\int\left(7\sqrt{x^5} - \frac{2}{x^5} - 3x^4 + \frac{4}{x}\right)dx;$ b) $\int(x^2+x)e^x\,dx$

31.4. a) $\int\left(3x^4 + \sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^3}\right)dx;$ b) $\int x(\sin 2x-3)\,dx$

31.5. a) $\int\left(6x^3 - \frac{5}{x} + 3\sqrt{x^5} - \frac{7}{x^4}\right)dx;$ b) $\int x(\cos 4x+3x)\,dx$

31.6. a) $\int\left(2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{6}{x} + 3\sqrt{x}\right)dx;$ b) $\int(3x+1)\cos 2x\,dx$

31.7. a) $\int\left(2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x} + 6x^2 - \frac{2}{x^5}\right)dx$; b) $\int (x-7)e^{2x}\, dx$

31.8. a) $\int\left(6x^5 + \frac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^6}\right)dx$; b) $\int (x-4)\cos 3x\, dz$

31.9. a) $\int\left(4x^5 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{x^4}\right)dx$; b) $\int (2x-5)e^{x}\, dx$

31.10. a) $\int\left(3x^8 + \frac{4}{x} - \sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{x^5}\right)dx$; b) $\int \ln(x+2)\, dx$

31.11. a) $\int\left(4x^2 - \frac{3}{x} - \sqrt{x^7} + \frac{3}{x^6}\right)dx$; b) $\int (3x+4)\sin x\, dx$

31.12. a) $\int\left(8x^3 + \frac{6}{x^4} - \sqrt[6]{x^5} + \frac{7}{x^3}\right)dx$; b) $\int (4x-3)\cos 2x\, dx$

31.13. a) $\int\left(5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x}\right)dx$; b) $\int x(\sin 3x+5)\cdot dx$

31.14. a) $\int\left(3x^5 - \frac{4}{x} - \sqrt{x^5} + \frac{10}{x^5}\right)dx$; b) $\int (8x-2)\cos 4x\, dx$

31.15. a) $\int\left(5x^4 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)dx$; b) $\int (4x-1)e^{-x}\, dx$

31.16. a) $\int\left(4x^3 - \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^7} + \frac{6}{x^2}\right)dx$; b) $\int (x+3)\sin x\, dx$

31.17. a) $\int\left(\sqrt[4]{x^5} - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5} + 3x^4\right)dx$; b) $\int (2x+4)\cos 6x\, dx$

31.18. a) $\int\left(6x^5 - \frac{4}{x^4} + \frac{3}{x} - \sqrt[4]{x^5}\right)dx$; b) $\int (x-6)\cdot\sin\frac{x}{2}\, dx$

31.19. a) $\int\left(\frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^5} - 2x^6\right)dx;$ b) $\int (x+3)\cos 6x\,dx$

31.20. a) $\int\left(\frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}\right)dx;$ b) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

31.21. a) $\int\left(8x^3 - \frac{4}{x} - \frac{6}{x^4} + \sqrt[9]{x^2}\right)dx;$ b) $\int (4x-5)e^{x/2}\,dx$

31.22. a) $\int\left(4x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} - \frac{3}{x^4}\right)dx;$ b) $\int (6x+1)\cos\frac{x}{2}\,dx$

31.23. a) $\int\left(7x^4 + \frac{4}{x} - \sqrt[6]{x^5} + \frac{8}{x^6}\right)dx;$ b) $\int (2x-8)\sin x\,dx$

31.24. a) $\int\left(\sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^5} - 5x^4\right)dx;$ b) $\int \sqrt{x}\cdot\ln x\,dx$

31.25. a) $\int\left(3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + 6\sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x}\right)dx;$ b) $\int (8-x)e^{-2x}\,dx$

31.26. a) $\int\left(9x^5 - \frac{6}{x} - \frac{5}{x^4} + 5\sqrt[3]{x^7}\right)dx;$ b) $\int \left(x+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{x}{4}\,dx$

31.27. a) $\int\left(\frac{3}{x^3} + \frac{8}{x} - 2\sqrt{x^3} + 5x^4\right)dx;$ b) $\int \left(x-\frac{1}{4}\right)\cos\frac{x}{8}\,x$

31.28. a) $\int\left(4\sqrt[6]{x^3} - \frac{6}{x} - \frac{4}{x^5} - 3x^7\right)dx;$ b) $\int \ln(x+4)\,dx$

31.29. a) $\int\left(10x^4 + 3\sqrt{x^5} - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^6}\right)dx;$ b) $\int (2x+3)e^{-4x}\,dx$

31.30. a) $\int\left(5x^3 + \frac{6}{x^3} - \sqrt[3]{x^8} - \frac{6}{x^5}\right)dx;$ b) $\int (x+2)\cdot\cos\frac{x}{4}\,dx$

32.1.-32.8. Найти среднее значение издержек $K=K(x)$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от x_1 до x_2 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

32.1.	$K(x) = 3x^2 + 4x + 5$	$1 \leqslant x \leqslant 3$
32.2.	$K(x) = 6x^2 + 2x + 1$	$0 \leqslant x \leqslant 4$
32.3.	$K(x) = 3x^2 + 6x + 3$	$2 \leqslant x \leqslant 6$
32.4.	$K(x) = 9x^2 + 8x + 4$	$0 \leqslant x \leqslant 8$
32.5.	$K(x) = 6x^2 + 4x + 3$	$1 \leqslant x \leqslant 7$
32.6.	$K(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$	$2 \leqslant x \leqslant 5$
32.7.	$K(x) = 3x^2 + 8x + 2$	$3 \leqslant x \leqslant 6$
32.8.	$K(x) = 6x^2 + 2x + 7$	$2 \leqslant x \leqslant 7$

32.9.-32.15. Определить запас товаров на складе, образуемый за n дней, если поступление товаров характеризуется функцией $f=f(t)$.

32.9.	$n = 2$	$f(x) = 12t^2 + 2t + 3$
32.10.	$n = 3$	$f(x) = 3t^2 + 6t + 7$
32.11.	$n = 5$	$f(x) = 15t^2 + 4t + 1$
32.12.	$n = 4$	$f(x) = 9t^2 + 4t + 3$
32.13.	$n = 6$	$f(x) = 6t^2 + 2t + 10$
32.14.	$n = 3$	$f(x) = 3t^2 + 2t + 8$

32.15. $n = 5$ $f(x) = 12t^2 + 4t + 2$

32.16.-32.23. Определить объем продукции, произведенный рабочим за n-ный час, если производительность труда задана функцией $f(t)$.

32.16. за третий час, $f(t) = 4 + \dfrac{1}{3t+2}$

32.17. за первый час, $f(t) = 5 + \dfrac{3}{4t+1}$

32.18. за второй час, $f(t) = 2 + \dfrac{4}{5t+3}$

32.19. за четвертый час, $f(t) = 1 + \dfrac{2}{4t+3}$

32.20. за второй час, $f(t) = 3 + \dfrac{1}{3t+1}$

32.21. за первый час, $f(t) = 4 + \dfrac{3}{6t+2}$

32.22. за третий час, $f(t) = 6 + \dfrac{2}{4t+3}$

32.23. за четвертый час, $f(t) = 2 + \dfrac{4}{2t+7}$

32.24.-32.30. Найти полные издержки производства, если объем продукции $x = b$ единицам, а зависимость издержек от общего объема имеет вид $K=K(x)$.

32.24. $b = 48$ единиц, $K(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

32.25. $b = 12$ единиц, $K(x) = x^3 + 6x^2 + 3x$

32.26. $b = 36$ единиц, $K(x) = x^3 + 9x^2 - 2x$

32.27. $b = 60$ единиц, $K(x) = x^3 + 3x^2 + 8x$

32.28. $b = 42$ единицы, $K(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

32.29. $b = 24$ единицы, $K(x) = 4x^3 + 3x^2 + 12x$

32.30. $b = 18$ единиц, $K(x) = 3x^2 - x + 10$

33. Даны функция $z = f(x;y)$, точка $A(x_0;y_0)$ и вектор $\vec{a} = (a_1;a_2)$. Найти: 1) grad z в точке A; 2) производную функции z в точке A в направлении вектора $\vec{a}$.

33.1. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x - 14y$, $A(4;1)$, $\vec{a} = (4;3)$

33.2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy^2$; $A(2;1)$, $\vec{a} = (4;-3)$

33.3. $z = 1 + 6x - x^2 + 8xy - y^2$; $A(1;2)$, $\vec{a} = (-4;3)$

33.4. $z = x^3 + 4xy^2 - 2y^3$; $A(-1;3)$, $\vec{a} = (-4;-3)$

33.5. $z = 3x^2y - 6xy^2 + y^3$; $A(-1;-2)$, $\vec{a} = (3;4)$

33.6. $z = x^2 + 2xy^3 + 4y^4 + 3$; $A(1;-1)$, $\vec{a} = (-3;4)$

33.7. $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$; $A(1;-2)$, $\vec{a} = (3;-4)$

33.8. $z = 6(x-y^2) + 3xy + x^2$; $A(3;1)$, $\vec{a} = (-3;-4)$

33.9. $z = x^2 + xy - 3y^2 - 6x + 9y$; $A(1;3)$, $\vec{a} = (4;3)$

33.10. $z = (x-y)^2 + 2y^2 - 10x$; $A(2;1)$, $\vec{a} = (-3;4)$

33.11. $z = x^2 + 2xy - y^3 - 4x$; $A(1;2)$, $\vec{a} = (5;12)$

33.12. $z = 5x^2 - 3xy +$ [illegible] y^2; $A(2;1)$, $\vec{a} = (5;-12)$

33.13. $z = x^2 - 8xy + 3y^2 - 4x$; $A(1;3)$, $\vec{a} = (-5;12)$

33.14. $z = x^2+y^2-2x+6y;$ $A(3;1)$, $\vec{a} = (-5;-12)$

33.15. $z = 2x^3-3xy^2+4y^3-6x;$ $A(-2;1)$, $\vec{a} = (12;5)$

33.16. $z = 3x^2-6xy+8y^2+4y;$ $A(-2,-2)$, $\vec{a} = (12;-5)$

3.17. $z = 3x+6y-x^2-xy^2+4y^3;$ $A(3;1)$, $\vec{a} = (-12;-5)$

33.18. $z = x^2-2y^2+5xy;$ $A(2;1)$, $\vec{a} = (-12;5)$

33.19. $z = x^2+10y^2-3xy^3;$ $A(1;3)$, $\vec{a} = (5;12)$

33.20. $z = \frac{1}{2}x^2-xy^3-4x+6y;$ $A(2;2)$, $\vec{a} = (12;5)$

33.21. $z = 3x^2+3y^2-2x+6y;$ $A(2;3)$, $\vec{a} = (8;6)$

33.22. $z = 2x^2+(4y+3)^2+xy;$ $A(2;4)$, $\vec{a} = (-8;6)$

33.23. $z = (2x+3y)^2-4x^2y;$ $A(4;2)$, $\vec{a} = (-8;-6)$

33.24. $z = x^2-2xy-y^3+3x+4;$ $A(4;3)$, $\vec{a} = (8;-6)$

33.25. $z = 3x^2+3y^2-x-y+4;$ $A(4;1)$, $\vec{a} = (6;8)$

33.26. $z = x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2-2x;$ $A(1;3)$, $\vec{a} = (-6;8)$

33.27. $z = 6xy^2-x^2+3y+4;$ $A(3;4)$, $\vec{a} = (-6;-8)$

33.28. $z = 2x^2y-x^3y-x^2y^2;$ $A(1;1)$, $\vec{a} = (4;3)$

33.29. $z = x^2+2xy+4x-y^2;$ $A(2;2)$, $\vec{a} = (5;12)$

33.30. $z = 5x^2-3xy+y^2+3;$ $A(1;3)$, $\vec{a} = (6;8)$

34.1.-34.8.

Данные о выпуске меховой продукции на фабрике за 7 лет помещены в таблице. Найти параметры a и b функции $y=ax+b$, выражающей динамику роста за каждый год, пользуясь методом наименьших квадратов.

34.1.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y, млн.р.	6,3	9,5	13,9	16,1	20,2	24,1	25,0

34.2.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
	6,1	12,5	15,6	21,2	24,3	25,0	27,3

34.3.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y, млн.р.	6,2	9,8	12,1	16,0	20,0	23,9	25,6

34.4.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y, млн.р.	5,2	8,1	10,6	13,7	16,7	20,1	21,3

34.5.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y, млн.р.	5,8	6,4	8,7	7,5	12,3	14,1	15,0

34.6.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y, млн.р.	5,7	8,3	9,2	9,4	12,8	13,0	14,6

34.7.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y, млн.р.	7,4	8,1	9,9	10,2	13,6	12,5	14,0

34.8.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y, млн.р.	5,3	6,2	9,1	10,0	12,7	14,3	16,2

34.9.-34.15.

Темпы роста y производительности труда по годам x в промышленности республики приведены в таблице. Полагая, что y зависит от x линейно $y=ax+b$, найти a и b по методу наименьших квадратов.

34.9.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, %	100	156	170	184	194	205	220	229

34.10.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, %	100	161	174	185	193	200	219	231

34.11.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, %	100	147	154	172	169	183	195	205

34.12.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, %	100	121	136	142	154	168	151	170

34.13.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, %	100	136	153	140	161	164	173	165

34.14.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, %	100	123	145	153	172	181	170	192

34.15.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, %	100	152	166	161	174	183	190	200

34.16.-34-23.

Урожайность зерновых (y, ц/га) за 8 лет приводится в таблице. Пользуясь методом наименьших квадратов, установить линейную зависимость $y=ax+b$.

34.16.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, ц/га	18	20	19	23	31	27	32	30

34.17.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, ц/га	19	21	20	24	32	28	34	32

34.18.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, ц/га	16	18	17	21	26	23	29	27

34.19.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, ц/га	17	15	20	22	25	21	24	23

34.20.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, ц/га	19	22	26	24	27	29	25	30

34.21.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, ц/га	18	21	25	23	28	27	28	30

34.22.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, ц/га	17	19	21	24	20	27	25	30

34.23.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
y, ц/га	18	20	22	24	23	26	27	25

34.24. - 34.30.

Объем розничного товарооборота государственной торговли за 7 лет приводится в таблице. Составить линейную зависимость $y=ax+b$, определив a и b по методу наименьших квадратов.

34.24.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y	100	123	134	148	166	180	196

34.25.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y	100	108	134	136	158	183	194

34.26.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y	100	136	143	165	182	194	205

34.27.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y	100	104	124	135	172	183	198

34.28.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y	100	116	133	151	149	162	185

34.29.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y	100	109	123	145	167	184	193

34.30.

Год, x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y	100	132	143	155	168	178	200

35. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ N 3.

35.1. При нахождении неопределенных интегралов следует использовать таблицу интегралов основных элементарных функций , свойства интегралов и формулу интегрирования по частям . Приведем некоторые формулы

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

3. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$

4. $\int \cos x\, dx = \sin x + C,$

5. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C,$

6. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C,$

7. $\int e^x dx = e^x + C,$

8. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C.$

Свойства:

1. $\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a = const;$

2. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$

Формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Найти неопределенные интегралы следующих функций:

1. $\int\left(18x^5 + \frac{10}{x} - \sqrt[5]{x^3} - \frac{12}{x^4}\right)dx = 18\int x^5 dx + 10\int\frac{dx}{x} - \int x^{3/5}dx - 12\int x^{-4}dx =$

$$= \frac{18}{6}x^6 + 10\cdot\ln|x| - \frac{x^{3/5+1}}{\frac{3}{5}+1} - 12\cdot\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = 3x^6 + 10\ln|x| -$$

$$-\frac{5}{8}x^{8/5}+3\frac{1}{x^3}+C = 3x^6+10\ln|x|-\frac{5}{8}x\cdot\sqrt[5]{x^3}+\frac{3}{x^3}+C.$$

2. $$\int\frac{\ln x}{x^6}dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=\dfrac{dx}{x^6} & v=-\dfrac{1}{5x^5}\end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5x^5}\ln x-\int\left(-\frac{1}{5x^5}\right)\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{5x^5}\ln x+\frac{1}{5}\int x^{-6}dx =$$

$$= -\frac{1}{5x^5}\ln x-\frac{1}{25x^5}+C = -\frac{5\ln x+1}{25x^5}+C.$$

3. $$\int(8x+6)\sin 3x\,dx = \begin{vmatrix} u=8x+6 & du=8dx \\ dv=\sin 3x\,dx & v=-\dfrac{1}{3}\cos 3x\end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{8x+6}{3}\cos 3x+\frac{8}{3}\int\cos 3x\,dx = -\frac{8x+6}{3}\cos 3x+\frac{8}{9}\sin 3x+C.$$

4. $$\int(3x+4)e^{-x/5}\,dx = \begin{vmatrix} u=3x+4 & du=3dx \\ dv=e^{-x/5}\,dx & v=-5e^{-x/5}\end{vmatrix} =$$

$$= -5(3x+4)e^{-x/5}+15\int e^{-x/5}\,dx = -5(3x+4)e^{-x/5}-75e^{-x/5}+C =$$

$$= -5(3x+19)e^{-x/5}+C.$$

5. $$\int \ln(x+8)\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x+8) & du = \dfrac{dx}{x+8} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\ln(x+8) - \int \frac{x}{x+8}dx = x\ln(x+8) - \int \frac{x+8-8}{x+8}dx =$$

$$= x\ln(x+8) - \int \left(1 - \frac{8}{x+8}\right)dx = x\ln(x+8) - x + 8\int \frac{dx}{x+8} =$$

$$= x\ln(x+8) - x + 8\ln|x+8| + C.$$

35.2. Применение определенного интеграла к решению задач экономического содержания рассмотрим на примерах.

1. Найти среднее значение издержек $K(x) = 24x^2+6x+8$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от 2 до 6 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

$$K_{cp} = \frac{1}{6-2}\int_2^6 K(x)dx = \frac{1}{4}\int_2^6 (24x^2+6x+8)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{24}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 + 8x\right)\Bigg|_2^6 = \frac{1}{4}(8x^3+3x^2+8x)\Bigg|_2^6 =$$

$$= \frac{1}{4}(8\cdot 6^3 + 3\cdot 36 + 8\cdot 6) - \frac{1}{4}(8\cdot 8 + 3\cdot 4 + 8\cdot 2) = 2\cdot 6^3 + 3\cdot 9 +$$

$$+ 2\cdot 6 - 8\cdot 2 - 3 - 4 = 432+27+12-16-7 = 448 \text{ (ден.ед.)}$$

Определим, при каком объеме x издержки принимают среднее значение 448.

Решим уравнение

$$24x^2+6x+8=448, \qquad 24x^2+6x-440=0$$

$$12x^2+3x-220=0, \qquad D = 3^2+4\cdot 12\cdot 220 = 10569$$

$$\sqrt{D} = 102{,}81$$

$$x = \frac{-3 \pm 102{,}81}{24}, \quad \text{т.к.} \quad x>0, \text{ то}$$

$$x = \frac{-3 + 102{,}81}{24} = 4{,}16 \text{ (ед.продукции)}$$

2. Определить запас товаров на складе , образуемый за 7 дней , если поступление товаров задано функцией $f(t)=12t^2-4t+5$.

Запас товаров на складе обозначим A.

$$A = \int_0^7 f(t)dt = \int_0^7 (12t^2-4t+5)dt = \left(\frac{12}{3}t^3-2t^2+5t\right)\Big|_0^7 =$$

$$= (4t^3-2t^2+5t)\Big|_0^7 = 4\cdot 7^3-2\cdot 49+5\cdot 7 = 1372-98+35 = 1309 \text{ (ед.прод.)}.$$

3. Определить объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2 , если производительность труда задана функцией $f(t)$

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

Пусть $f(t) = 3 + \dfrac{4}{2t+1}$ и продукция произведена за третий час ,

т.е. $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$.

$$V = \int_2^3 \left(3+\frac{4}{2t+1}\right)dt = 3t\Big|_2^3 + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{d(2t+1)}{2t+1} =$$

$$= 9 - 6 + \frac{1}{2}\ln|2t+1|\Big|_2^3 = 3 + \frac{1}{2}\ln 7 - \frac{1}{2}\ln 5 =$$

$$= 3 + \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5} = 3 + \frac{1}{2}\ln 1,4 = 3,168 \text{ (усл.ед.)}.$$

4. Зависимость издержек от объема имеет вид $K(x) = x^3+9x^2-6x$. Найти полные издержки производства, если объем продукции равен 72 единицы.

$$P = \int_0^{72}(x^3+9x^2-6x)dx = \left(\frac{x^4}{4}+3x^3-3x^2\right)\Bigg|_0^{72} = \frac{72^4}{4}+3\cdot 72^3 - 3\cdot 72^2 =$$

$$= 18\cdot 72^3+3\cdot 72^3-3\cdot 72^2 = 21\cdot 72^3 - 3\cdot 72^2 = 72^2(21\cdot 72-3) =$$

$$= 5184\cdot 1509 = 7\ 822\ 656 \text{ (ден.ед.)}$$

35.3. Дана функция $z = -4x^2+6xy^3+y^4+2x-3y+6$, точка $A(1;-1)$ и вектор $\vec{a} = (-4;3)$. Найти: 1) $\mathrm{grad}\ z(A)$; 2) производную функции z в точке A в направлении вектора $\vec{a}$.

1) $\mathrm{grad}\ z(A) = (z'_x(A);\ z'_y(A))$

$z'_x = -8x+6y^3+2, \quad z'_x(A) = -8-6+2 = -12,$

$z'_y = 18xy^2+4y^3-3, \quad z'_y(A) = 18-4-3 = 11,$

$\mathrm{grad}\ z(A) = (-12;11) = -12\cdot\vec{i}+ 11\cdot\vec{j}$.

2) $\dfrac{\partial z}{\partial a} = z'_x(A)\cdot\cos\alpha + z'_y(A)\cdot\cos\beta$

Находим направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\cos\alpha = \dfrac{-4}{5}, \ \cos\beta = \dfrac{3}{5}$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = (-12)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + 11\cdot\frac{3}{5} = \frac{60}{5} + \frac{33}{5} = 12 + 6,6 = 18,6.$$

35.4. Дана таблица значений x и y. Пользуясь методом наименьших квадратов, составить линейную зависимость $y=ax+b$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	15	20	21	24	30	32	35	36

Параметры a и b определим, решив систему уравнений

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

В данном случае $n=8$. Составим вспомогательную таблицу.

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
	1	15	15	1
	2	20	40	4
	3	21	63	9
	4	24	96	16
	5	30	150	25
	6	32	192	36
	7	35	245	49
	8	36	288	64
Σ	36	213	1089	204

$$\begin{cases} 204a + 36b = 1089 \\ 36a + 8b = 213 \end{cases}$$

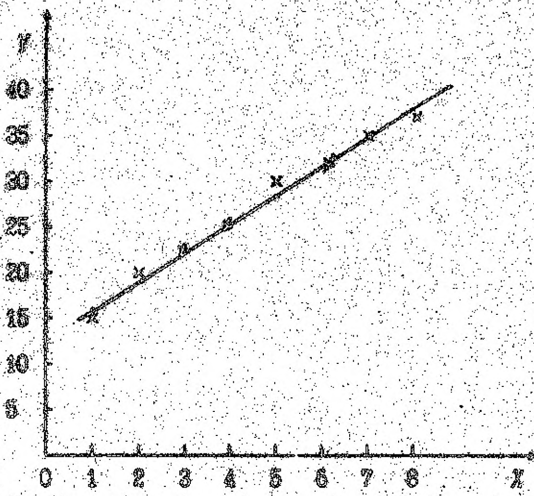
$$\Delta = \begin{vmatrix} 204 & 36 \\ 36 & 8 \end{vmatrix} = 204\cdot 8-36\cdot 36=1632-1296=336$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 1089 & 36 \\ 213 & 8 \end{vmatrix} = 1089\cdot 8-213\cdot 36=8712-7668=1044$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 204 & 1089 \\ 36 & 213 \end{vmatrix} = 204\cdot 213-36\cdot 1089=43452-39204=4248$$

$$a = \frac{1044}{336} = 3,1; \qquad b = \frac{4248}{336} = 12,6$$

$$y = 3,1x + 12,6$$



4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА N 4

41. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения:

41.1. а) $y''+4y=0$; б) $y''-10y'+25y=0$;
в) $y''+3y'+2y=0$.

41.2. а) $y''-y'-2y=0$; б) $y''+5y=0$;
в) $y''+4y'+4y=0$.

41.3. а) $y''-3y'=0$; б) $y''-4y'+13y=0$;
в) $y''-3y'+2y=0$.

41.4. а) $y''-6y'+5y=0$; б) $y''+7y'=0$;
в) $y''+2y'+5y=0$.

41.5. а) $y''-2y'+10=0$; б) $y''+y'-2y=0$;
в) $y''-5y'=0$.

41.6. а) $y''-9y=0$; б) $y''+2y'+17y=0$;
в) $y''-y'-12y=0$.

41.7. а) $y''+y'-6y=0$; б) $y''+16y'=0$;
в) $y''-4y'+20y=0$.

41.8. а) $y''-36y=0$; б) $y''-4y'+5y=0$;
в) $y''+2y'-3y=0$.

41.9. а) $y''+3y'=0$; б) $y''-5y'+4y=0$;
в) $y''+16y=0$.

41.10. а) $y''-6y'+8y=0$; б) $y''+4y'+5y=0$;
в) $y''+5y'=0$.

41.11. а) $4y''-8y'+3y=0$; б) $y''-3y'=0$;
в) $y''-2y'+10y=0$.

41.12. а) $y''+4y'+20y=0$; б) $y''-3y'-10y=0$;
в) $y''-16y=0$.

41.13. а) $9y''+6y'+y=0$; б) $y''-4y'-21y=0$;
в) $y''+y=0$.

41.14. а) $2y''+3y'+y=0$; б) $y''+4y'+8y=0$;
в) $y''-6y'+9y=0$.

41.15. а) $y''-10y'+21y=0$; б) $y''-2y'+2y=0$;
в) $y''+4y'=0$.

41.16. а) $y''+6y'=0$; б) $y''+10y'+29y=0$;
в) $y''-8y'+7y=0$.

41.17. а) $y''+2y'+2y=0$; б) $y''+6y'+9y=0$;
в) $y''+25y=0$.

41.18. а) $y''-7y'-8y=0$; б) $y''+4y'+13y=0$;
в) $y''-3y'=0$.

41.19. а) $y''-3y'-4y=0$; б) $y''+6y'+13y=0$;
в) $y''+2y'=0$.

41.20. а) $y''-8y'+16y=0$; б) $y''-10y'+16y=0$;
в) $y''+25y'=0$.

41.21. а) $y''-3y'-18y=0$; б) $y''-6y'=0$;
в) $y''+2y'+5y=0$.

41.22. а) $y''-2y'-15y=0$; б) $y''-6y'+13y=0$;
в) $y''-8y'=0$.

41.23. а) $y''+6y+25y=0$; б) $y''+2y'+y=0$;
в) $y''-4y'=0$.

41.24. а) $y''-6y'+8y=0$; б) $4y''+4y'+y=0$;
в) $y''+10y'=0$.

41.25. а) $y''+9y=0$; б) $9y''-6y'+y=0$;
в) $y''+6y'+8y=0$

41.26. а) $y''+6y'+10y=0$; б) $y''-5y'+4y=0$;
в) $y''-4y'+4y=0$.

41.27. а) $4y''+8y'-5y=0$; б) $y''-6y'+10y=0$;
в) $y''-y=0$.

41.28. а) $y''+8y'+25y=0$; б) $9y''+3y'-2y=0$;
в) $y''+9y'=0$.

41.29. а) $6y''+7y'-3y=0$; б) $4y''-4y'+y=0$;
в) $y''+81y=0$.

41.30. а) $y''+12y'+37y=0$; б) $9y''-6y'+y=0$;
в) $y''-2y'=0$.

42. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

42.1. $y''+y'=2x-1$.

42.2. $y''-2y'+5y=10\cos 2x$.

42.3. $y''-2y'-8y=12\sin 2x-36\cos 2x$.

42.4. $y''-12y'+36y=5\sin 3x$.

42.5. $y''-3y'+2y=(34-12x)e^{-x}$.

42.6. $y''-6y'+10y=51e^{-x}$.

42.7. $y''+49y=2\cos 3x-5\sin 3x$.

42.8. $y''+6y'+10y=74e^{3x}$.

42.9. $y''-3y'+2y=3\cos x+7\sin x$.

42.10. $y''-6y'+9y=(48x+8)e^{x}$.

42.11. $y''+100y=72e^{2x}$.

42.12. $y''-5y'+6y=3\cos x+19\sin x$.

42.13. $y''+36y=2+3x-x^2$.

42.14. $y''-y=-4\cos x-2\sin x$.

42.15. $y''+2y'-24y=6\cos 3x-33\sin 3x$.

42.16. $y''+6y'+13y=-5\sin 2x$.

42.17. $y''+4y=3\sin 3x-2\cos 3x$.

42.18. $y''-4y'+29y=7\sin 5x$.

42.19. $y''-4y'+5y=2e^{-3x}$.

42.20. $y''+16y=8\cos 4x$.

42.21. $y''+9y=(2x-5)e^{3x}$.

42.22. $y''-12y'+40y=3e^{6x}$.

42.23. $y''+4y'=2\sin 2x+3\cos 2x$.

42.24. $y''+2y'+y=4e^{2x}$.

42.25. $y''-8y'+12y=3x^2+5x-1$.

42.26. $y''+8y'+25y=13e^{5x}$.

42.27. $y''-9y'+20y=3e^{-2x}$.

42.28. $y''+2y'+37y=5x^2-1$.

42.29. $6y''-y'-y=9e^{2x}$.

42.30. $2y''+7y'+3y=4\cos 3x$.

43. Исследовать на сходимость знакоположительный числовой ряд.

43.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^3}$.

43.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{(n+1)!}$.

43.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3$.

43.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$.

43.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.

43.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 5\cdot 6 \ldots (n+3)}{5\cdot 7\cdot 9 \ldots (2n+3)}$.

43.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n \cdot n$.

43.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

43.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$.

43.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{7^n}$.

43.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+6n+10}}$.

43.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{(2n+1)!}$.

43.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n (n+2)!}$.

43.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8 \ldots (3n-1)}{3\cdot 7\cdot 11 \ldots (4n-1)}$.

43.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{4^n}$.

43.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n!}$.

43.17 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

43.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n}}$.

43.19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{5^n}$.

43.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$.

43.21 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$.

43.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{(n+3)!}$.

43.23 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot \ln^3(n+1)}$.

43.24 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$.

43.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{(2n)!}$.

43.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\ldots(5n-3)}$.

43.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 10^n}{(n+1)!}$.

43.28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2n)!}$.

43.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n \cdot (2n+3)}$.

43.30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$.

44. Найти интервал сходимости степенного ряда.

44.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$.

44.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot x^{n-1}}{2^n}$.

44.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 5^n}$.

44.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

44.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n 2^n}{3n-1}$.

44.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot x^n}{n!}$.

44.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \cdot n^3}$.

44.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$.

44.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$.

44.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

44.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

44.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n^2+1)}$.

44.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)\cdot x^n$.

44.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\cdot x^n}{\sqrt{n}}$.

44.50 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

44.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$.

44.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

44.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n\cdot\sqrt{3n-1}}$.

44.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{2n+1}}$.

44.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2\cdot x^n}{4^n}$.

44.21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot x^n}{(n+2)3^n}$.

44.22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n\cdot(n+3)}$.

44.23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot x^n}{5^n\cdot n^3}$.

44.24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot x^n}{(n+1)\cdot 5^n}$.

44.25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot x^n}{3^n}$.

44.26 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot(n+1)}$.

44.27 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\cdot x^n}{2n+1}$.

44.28 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\cdot x^n}{n^2}$.

44.29 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n\cdot x^n}{3n+2}$.

44.30 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\cdot x^n$.

45. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 4.

45.1. Линейные дифференциальные уравнения.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+py'+qy=f(x), \qquad p,q - const \qquad (4.1)$$

состоит из какого-либо частного решения этого уравнения y_* и общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения

$$y''+py'+qy=0 \qquad (4.2)$$

т.е. $y=\bar{y}+y_*$. Если k_1, k_2 - корни характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$, соответствующего однородному дифференциальному уравнению (4.2), то общее решение $\bar{y}$ однородного уравнения (4.2) записывается в одном из следующих трех видов:

1) $k_1,k_2 \in R, \quad k_1 \neq k_2 \quad \Rightarrow \bar{y}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x};$

2) $k_1,k_2 \in R, \quad k_1=k_2 \quad \Rightarrow \bar{y}=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx};$ (4.3)

3) $k_{1,2}=\alpha \pm i\beta, \quad \alpha,\beta \in R, \; i=\sqrt{-1} \quad \Rightarrow \bar{y}=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$

$C_1,C_2 - \forall const.$

Частное решение линейного неоднородного уравнения (4.1) находится либо методом неопределенных коэффициентов, если правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, либо методом вариации произвольных постоянных в общем случае.

1. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения:

а) $y''-5y'+6y=0$; б) $4y''-4y'+y=0$;

в) $y''-2y'+37y=0$.

Для каждого из данных дифференциальных уравнений составляем соответствующее ему характеристическое уравнение и решаем его.

По виду полученных корней характеристического уравнения по формулам (4.3) записываем общее решение дифференциального уравнения

а) $k^2-5k+6=0 \Rightarrow k_1=2,\ k_2=3 \Rightarrow y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$;

б) $4k^2-4k+1=0 \Rightarrow k_1=k_2=1/2 \Rightarrow y=C_1e^{x/2}+C_2xe^{x/2}$;

в) $k^2-2k+37=0 \Rightarrow k_{1,2}=1\pm 6i \Rightarrow y=e^x(C_1\cos 6x+C_2\sin 6x)$

$$C_1, C_2 - \forall const.$$

2. Найти общее решение линейного <u>неоднородного</u> дифференциального уравнения

$$y''-4y'+3y=5xe^{3x}. \qquad (4.4)$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y''-4y'+3y=0. \qquad (4.5)$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2-4k+3=0$$

Его корни

$$k_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow k_1=1, k_2=3.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные различные числа то по формулам (4.3) общее решение <u>однородного</u> дифференциального уравнения (4.5) имеет вид

$$\bar{y}=C_1e^{x}+C_2e^{3x}, \quad C_1, C_2 - \forall const.$$

Частное решение y_* линейного неоднородного уравнения (4.4) в соответствии с рекомендациями теории нужно искать в виде

$$y_* = x(ax+b)e^{3x} = (ax^2+bx)e^{3x},$$

где a, b - неопределенные пока коэффициенты, подлежащие нахождению. Найдем

$$y'_* = (2ax+b)e^{3x}+3(ax^2+bx)e^{3x},$$

$$y''_* = 2ae^{3x}+3(2ax+b)e^{3x}+3(2ax+b)e^{3x}+9(ax^2+bx)e^{3x}.$$

Подставим выражения для y_*, y'_*, y''_* в левую часть уравнения (4.4)

$$2ae^{3x}+6(2ax+b)e^{3x}+9(ax^2+bx)e^{3x}-4(2ax+b)e^{3x}-12(ax^2+bx)c^{3x}+$$

$$+3(ax^2+bx)e^{3x}=5xe^{3x}.$$

Приводя подобные и сокращая на e^{3x}, будем иметь

$$2a+2(2ax+b)=5x$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\begin{array}{c|l} x & 4a=5, \\ x^0 & 2a+2b=0. \end{array}\Bigg\}$$

Откуда $a = \dfrac{5}{4}$, $b = -\dfrac{5}{4}$.

Тогда частное решение y_* уравнения (4.4) примет вид

$$y_* = \left(\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}x\right)e^{3x} = \frac{5}{4}(x^2-x)e^{3x}.$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения (4.4) запишется в виде

$$y = \bar{y} + y_* = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{5}{4}(x^2 - x)e^{3x}$$

45.2. Числовые ряды.

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots, \quad U_n = f(n) \qquad (4.6)$$

называется сходящимся, если его частичная сумма $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ имеет конечный предел при $n \to \infty$. Величина $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ называется при этом суммой ряда. Если $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ или не существует, то ряд называется расходящимся.

Если ряд (4.6) сходится, то $\lim_{n\to\infty} U = 0$ (необходимый признак сходимости ряда) . Обратное утверждение , вообще говоря , неверно.

Ряд (4.6) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами:

1. Признак сравнения. Если существует конечный отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = b \neq 0$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ сходятся или расходятся одновременно. Полезно знать, что часто применяемые для сравнения ряды:

1) бесконечная геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| > 1$;

2) обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in R$ сходится при $p>1$ и расходится при $p \le 1$.

2. Признак Даламбера. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$, то при $l<1$ ряд (4.6) сходится; при $l>1$ ряд (4.6) расходится; при $l=1$ признак не дает ответа.

3. Интегральный признак Коши. Ряд (4.6) и несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

3. Исследовать на сходимость знакоположительный числовой ряд:

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Здесь $U_n = \frac{3^n}{n!}$, $U_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

В данном случае удобно применить признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0,$$

$l=0<1$, значит ряд сходится.

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3n+1}$

Здесь $U_n = \frac{1}{2n^2+3n+1}$, $U_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)^2+3(n+1)+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{2(n+1)^2+3(n+1)+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2(1+\frac{1}{n})^2+3(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{2}{2}=1.$$

Признак Даламбера не дает ответа о сходимости ряда.

Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится как обобщенный гармонический ряд при $p=2>1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля, то рассматриваемый ряд также сходится.

3.3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,\ln^2 n}$

Применяя правило Лопиталя нетрудно убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,\ln^2 n}{(n+1)\ln^2(n+1)}=1,$$

т.е. признак Даламбера не дает ответа о сходимости ряда. Применим интегральный признак Коши.

$$\int_2^{+\infty}f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\,\ln^2 x}=\int_2^{+\infty}\ln^{-2}x\,d(\ln x)=\left.\frac{\ln^{-1}x}{-1}\right|_2^{+\infty}=$$

$$=-\left.\frac{1}{\ln x}\right|_2^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)-\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)=0+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}.$$

Так как несобственный интеграл равен конечному числу, т.е. сходится, то данный ряд также сходится.

45.3. Степенные ряды.

Множество значений аргумента x, для которых степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

сходится, называется областью сходимости этого ряда.

Функция $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, x принадлежит области сходимости , называется суммой ряда . Для определения интервала абсолютной сходимости степенного ряда можно воспользоваться признаком Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

или радикальным признаком Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}, \qquad U(x) = \frac{x^n}{n\cdot 3^n}.$$

К ряду из абсолютных величин применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}\cdot x^n}\right| = \frac{|x|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} =$$

$$= \frac{|x|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{3}.$$

Для сходимости ряда по признаку Даламбера нужно, чтобы полученный предел был меньше единицы

$$\frac{|x|}{3} < 1 \iff |x| < 3 \iff -3 < x < 3.$$

Это и есть интервал сходимости ряда.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гурский Е.И.,Домашов В.П. и др. Руководство к решению задач по высшей математике.Ч.1,2.-Мн.:ВШ,1989-1990.
2. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике.Ч.1,2.-Мн. ВШ,1988.
3. Гусак А.А.,Гусак Г.М. Справочник по высшей математике.-Мн.:НТ, 1991.
4. Данко П.Е., Попов А.Г.,Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.Ч.1,2.М.:ВШ,1986.
5. Жевняк Р.М.,Карпук А.А. Высшая математика.Ч.1-3.Мн.:ВШ,1985-1993.
6. Карасев А.И.,Аксютина З.М.,Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов.Ч.1.М.:ВШ, 1982.
7. Кудрявцев В.А.,Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.:Наука,1986.
8. Кузнецов А.В.,Янчук Л.Ф. и др. Высшая математика: Общий курс. Учебник для экономических специальностей вузов. МН.:ВШ, 1993.
9. Кузнецов А.В.,Кузнецова Д.С. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс. Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. МН.:ВШ, 1994.
10. Рябушко А.П., Бархатов В.В. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике.Ч.1-3.-Мн.:ВШ, 1990-1991.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Составители: Тузик Альфред Иванович
Тузик Татьяна Александровна

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
по курсу "Высшая математика" для студентов-заочников
экономических специальностей

Часть I

Ответственный за выпуск Тузик А. И.
Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 19.05.97г. Формат $60\times84/_{16}$. Бумага писчая № 1. Усл. п. л. 4,4. Уч. изд. л. 4,8. Заказ № 381. Тираж 200 экз. Цена договорная. Отпечатано на ротапринте Брестского политехнического института. 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.