

области необходимо уже сегодня. Естественно, что в условиях отсутствия соответствующей нормативной базы подготовка новых образовательных стандартов затруднена, однако, необходимо внедрять в учебный процесс наиболее важные принципы и понятия новых технологий в проектировании, демонстрировать студентам потенциал современного программного обеспечения и эффективные способы его использования.

В заключение хочется отметить, что современные реалии в области информационного моделирования зданий и сооружений определяют большое число сложных задач и нерешенных вопросов, но вместе с тем открывают широкие возможности для новых научных исследований и достижений.

#### Список цитированных источников

1. Скворцов, А.В. BIM для автомобильных дорог: оценка зрелости технологии // САПР и ГИС автомобильных дорог. – 2014. – №2(3). – С. 12–21.
2. Скворцов, А.В. BIM для дорожной отрасли: что-то новое или мы этим уже занимаемся? // САПР и ГИС автомобильных дорог. – 2014. – №1(2). – С. 8–11.
3. Yin, R.K. Case study Research, Second Edition. – California: Sage Publications. 1994.
4. National Building Information Modelling Standard / National Institute of Building Sciences, buildingSMARTalliance. – 2007. – 182 p.
5. Succar, B. Building Information Modeling Framework: A Research and Delivery Foundation for Industry Stakeholders // Automation in Construction. – 2009. – Vol. 18 (3). – P. 357–375.

УДК 624.13

## РАСЧЕТ СИСТЕМЫ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК НА ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРИКЛАДНОГО ПАКЕТА «*MATHEMATICA*»

Босаков С. В., Козунова О. В.

**Введение.** Широко распространённые ленточные фундаменты как фундаменты мелкозаложенного под многоэтажные здания и сооружения на естественном грунтовом основании проектируются и моделируются в виде системы из перекрестных лент на различных моделях упругого основания. В этом случае система перекрестных лент заменяется на систему перекрестных балок на упругом основании, и последняя является расчетной моделью.

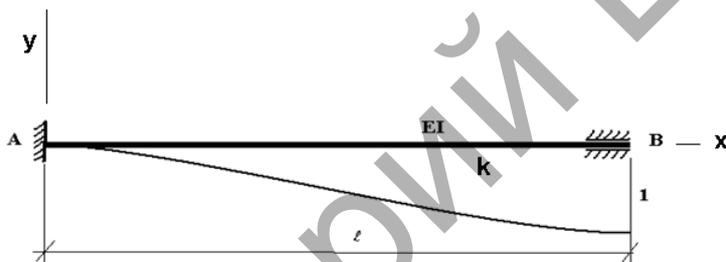
Методами расчета системы перекрестных балок занимались М.И. Горбунов-Посадов [1], И.А. Симвулиди [2], которые привели приближенное решение этой задачи. С.Д. Семенюк в своей диссертации [3] при расчете системы перекрестных балок на упругом четвертьпространстве использовал метод Ритца [4], где за совокупность координатных функций в основной системе способа Б.Н. Жемочкина [5] принят тринадцатичленный полином от функций двух переменных.

**Метод перемещений для расчета балки на упругом основании** предложил использовать Д.С. Пащевский [6]. Ниже метод перемещений в традиционной постановке без учета трения на контакте балки с основанием предлагается использовать для расчета системы перекрестных балок (или сетчатых плит по терминологии [2]) на основании Винклера.

В методе перемещений элементом основной системы является однопролетная балка [7] с различными опорными закреплениями. Для расчета рамы по методу перемещений в различных учебниках и справочниках составлены таблицы реактивных усилий в однопролетных балках от единичных смещений опор и внешней нагрузки.

В основной системе метода перемещений для системы перекрестных балок (а это тоже плоская рама) на упругом основании ее элементом также является горизонтальная однопролетная балка на основании Винклера с различными опорными закреплениями под действием вертикальной нагрузки. Поэтому в дальнейшем изложении рассматривается однопролетная балка на основании Винклера под действием единичных смещений опор и внешней нагрузки. Полученные таким образом реакции опор позволят составить таблицы для расчета системы перекрестных балок на упругом основании Винклера на вертикальную нагрузку.

**Пример 1.** Рассматривается однопролетная балка с защемленными концами на упругом основании Винклера с коэффициентом постели  $k$ . Правый конец этой балки получает единичное вертикальное перемещение (рис.1).



*Рисунок 1 – Единичное смещение правой опоры однопролетной балки с двумя защемлениями на упругом основании Винклера с коэффициентом постели  $k$*

Решение дифференциального уравнения изгиба балки на основании Винклера [8]

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = 0, \quad (1)$$

с граничными кинематическими условиями (рис.1).

При

$$x = 0: y = y' = 0; \quad (2)$$

$$x = l: y = 1; y' = 0.$$

Решение дифференциального уравнения (1) известно из [9]

$$y(x) = C_1 \cos \lambda \frac{x}{l} + C_2 \sin \lambda \frac{x}{l} + C_3 \operatorname{ch} \lambda \frac{x}{l} + C_4 \operatorname{sh} \lambda \frac{x}{l}. \quad (4)$$

Выполняя граничные условия (2), находятся постоянные интегрирования  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), а по ним - реакции опор.

После вычислений были получены следующие значения опорных реакций:

$$M_A = \frac{EI \lambda^2}{\ell^2} \frac{\cos \lambda - ch\lambda}{1 - \cos \lambda ch\lambda}, \quad \lambda^4 = \frac{k \ell^4}{EI}; \quad M_B = \frac{EI \lambda^2}{\ell^2} \frac{\sin \lambda sh\lambda}{1 - \cos \lambda ch\lambda}; \quad (5)$$

$$Q_A = \frac{EI \lambda^3}{\ell^3} \frac{\sin \lambda + sh\lambda}{1 - \cos \lambda ch\lambda}; \quad Q_B = \frac{EI \lambda^3}{\ell^3} \frac{ch\lambda \sin \lambda + \cos \lambda sh\lambda}{1 - \cos \lambda ch\lambda}.$$

Надо отметить, что величина параметра  $\lambda$  меняется в широких пределах и поэтому выражения (5) при некоторых значениях  $\lambda$  могут скачкообразно менять знак. В доказательство этому на рис. 2 приведен график изменения реактивного момента  $M_A$  при изменении параметра  $\lambda$ .

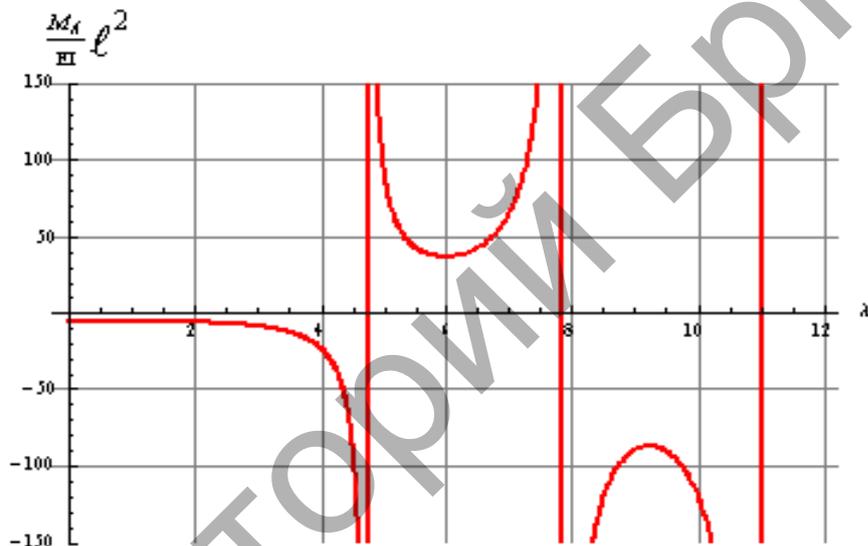


Рисунок 2 – Изменение реактивного момента в левом защемлении балки при изменении параметра  $\lambda$

Выражения для изгибающих моментов и поперечных сил в рассматриваемой балке от единичного смещения правого защемления, необходимые для построения окончательных эпюр в системе перекрестных балок, имеют вид:

$$M(x) = -\frac{EI \lambda^2}{2\ell^2} \left[ \begin{array}{l} \frac{\cos \lambda - ch\lambda}{1 - \cos \lambda ch\lambda} \cos \lambda \frac{x}{\ell} + \frac{\cos \lambda - ch\lambda}{1 - \cos \lambda ch\lambda} ch\lambda \frac{x}{\ell} + \\ \frac{\sin \lambda + sh\lambda}{1 - \cos \lambda ch\lambda} \sin \lambda \frac{x}{\ell} + \frac{\sin \lambda + sh\lambda}{1 - \cos \lambda ch\lambda} sh\lambda \frac{x}{\ell} \end{array} \right];$$

$$Q(x) = -\frac{EI \lambda^3}{2\ell^3} \left[ \begin{array}{l} \frac{\cos \lambda - ch\lambda}{1 - \cos \lambda ch\lambda} \sin \lambda \frac{x}{\ell} - \frac{\sin \lambda + sh\lambda}{1 - \cos \lambda ch\lambda} \cos \lambda \frac{x}{\ell} - \\ \frac{\cos \lambda - ch\lambda}{1 - \cos \lambda ch\lambda} sh\lambda \frac{x}{\ell} - \frac{\sin \lambda + sh\lambda}{1 - \cos \lambda ch\lambda} ch\lambda \frac{x}{\ell} \end{array} \right].$$

На рис. 3 приведен график изменения изгибающего момента по длине балки при  $\lambda=10$ . Как было отмечено выше, график имеет осциллирующий характер.

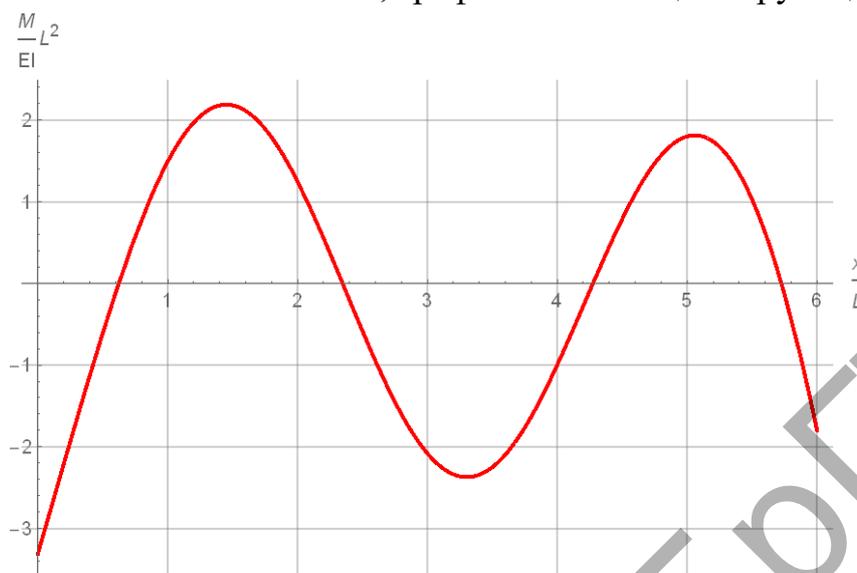


Рисунок 3 – Изменение изгибающего момента по длине балки при  $\lambda=10$

Подобным образом определяются реакции от единичных перемещений однопролетных балок с иными граничными условиями. При определении реакций от внешних нагрузок в уравнение (1) добавляется слагаемое, зависящее от вида внешней нагрузки и в решении дифференциального уравнения (4) добавится частное решение, соответствующее виду внешней нагрузки. После выполнения граничных условий (2) определяются постоянные интегрирования и находятся реакции опор от внешней нагрузки.

**Пример 2.** Отдельного рассмотрения заслуживает изучение действия единичного угла поворота левого крайнего сечения относительно оси балки, что позволяет учесть действие крутящих моментов при определении коэффициентов канонических уравнений метода перемещений для системы перекрестных балок.

Как показано М.И. Горбуновым-Посадовым [1], при кручении распределение реактивных давлений под подошвой балки в сечении, перпендикулярном оси балки, можно принять по линейному закону (рис.4). В результате расчета требуется вычислить крутящий момент, необходимый для поворота левого сечения на единичный угол, и крутящий момент, возникающий при этом в правом защемлении.

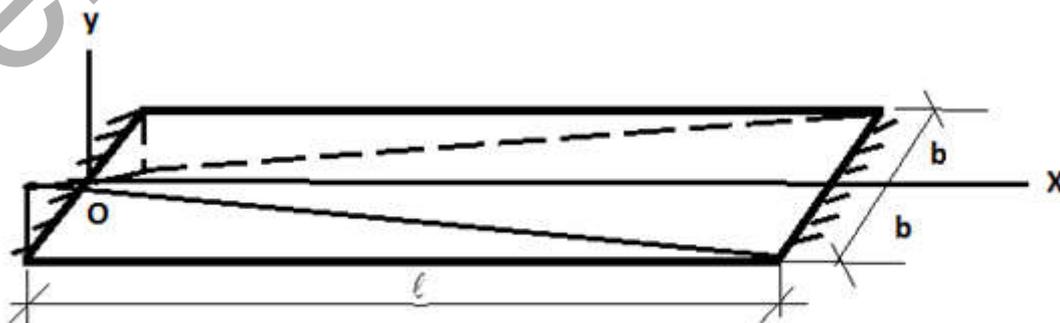


Рисунок 4 – Распределение реактивных давлений при кручении балки с подошвой прямоугольной формы на основании Винклера

Уравнение вертикальных перемещений точек подошвы скручиваемой балки можно задать в виде полинома

$$W(x, y) = C \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{y}{b} \quad (6)$$

Тогда энергия изгиба и кручения балки находим по формуле [4] как для пластинки размерами  $2b \times \ell$  (см. рис.4):

$$U = \frac{D}{2} \int_0^\ell \int_{-b}^b \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy. \quad (7)$$

В формуле (7)  $D, \nu$  – цилиндрическая жесткость пластинки и коэффициент Пуассона материала пластинки соответственно.

Энергия деформаций основания Винклера

$$A = \frac{k}{2} \int_0^\ell \int_{-b}^b W^2(x, y) dx dy. \quad (8)$$

Работа внешнего крутящего момента, приложенного на левом краю балки:

$$\Pi = -2D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0}. \quad (9)$$

Приравнивая производную от полной энергии  $U + A + \Pi$  по неизвестному коэффициенту  $C$  нулю, находится  $C$ , а затем перемещения (6)

$$W(x, y) = \frac{9 b(1-\nu)}{\lambda^4 (3 + b^2 / \ell^2) + 2(1-\nu)} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{y}{b}. \quad (10)$$

По (10) определяется распределение реактивных давлений под подошвой балки и затем из уравнений равновесия балки крутящий момент в правом защемлении (см. рис.4). В левом защемлении крутящий момент, вызывающий единичный угол поворота левого сечения, можно вычислить [9]:

$$r_{1,1} = \frac{GT}{\ell}, \quad (11)$$

где  $GT$  – крутильная жесткость поперечного сечения балки.

**Пример 3.** Рассматривается симметричная система перекрестных балок на основании Винклера (рис.5). Пусть на нее действует симметричная нагрузка. Тогда число неизвестных метода перемещений уменьшится до шести, а именно: 1,4,5,6 – линейные неизвестные (вертикальные перемещения), 2,3 – угловые неизвестные (углы поворота сечений во введенной заделке относительно осей  $X$  и  $Y$  соответственно).

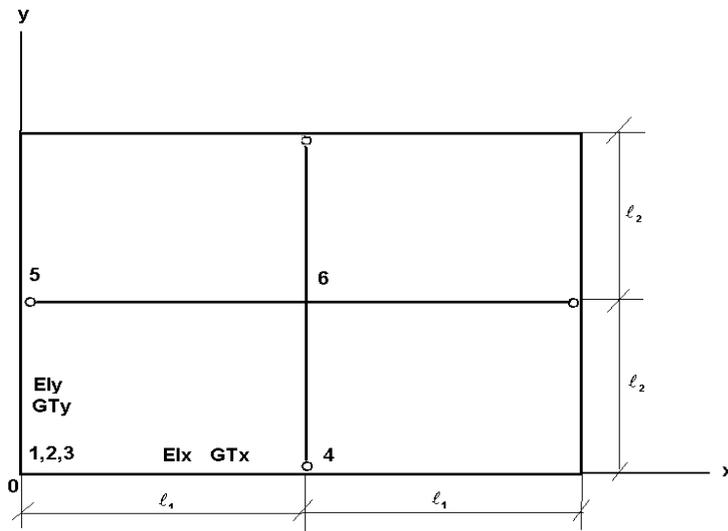


Рисунок 5 – Заданная система перекрестных балок на основании Винклера

Основная система метода перемещений образуется постановкой пространственного защемления и вертикальной связи в жесткие узлы и вертикальной связи в шарнирные. Строятся эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в основной системе от единичных угловых и линейных смещений каждого группового неизвестного метода перемещений по таблицам. Определяются коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) метода перемещений. В результате решения СЛАУ находятся перемещения узлов системы, по которым известными методами строительной механики строятся окончательные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

В примере 3 рассматриваются следующие исходные данные для системы из перекрестных балок на упругом основании Винклера (см. рис. 5):

- внешняя нагрузка в виде сосредоточенной силы  $P = 1000 \text{ кН}$ , приложенная к центральному узлу;
- геометрические параметры  $l_1 = l_2 = 6 \text{ м}$ ;  $b = 0,6 \text{ м}$ ;
- жесткости балок  $EI_x = EI_y = 10000 \text{ кНм}^2$ ;  $GT_x = GT_y = 1000 \text{ кНм}^2$ ;
- коэффициент постели упругого основания  $k = 5000 \text{ кН} / \text{м}^2$ ;
- упругий параметр системы из перекрестных балок  $\lambda_1 = \lambda_2 = 5.0454$ .

Матрица коэффициентов  $r$  при неизвестных перемещениях и вектор внешних нагрузок  $R$  имеют вид:

$$r = \begin{bmatrix} 2341.4577 & 2128.1083 & 2128.1083 & -1870.4850 & -1870.4850 & 0 \\ 2128.1083 & 3422.9489 & 0 & 2242.5086 & 0 & 0 \\ 2128.1083 & 0 & 3422.9489 & 0 & 2242.5086 & 0 \\ -1870.4850 & 2242.5086 & 0 & 2182.6299 & 0 & -469.4557 \\ -1870.4850 & 0 & 2242.5086 & 0 & 2182.6299 & -469.4557 \\ 0 & 0 & 0 & -469.4557 & -469.4557 & 1222.4615 \end{bmatrix}$$

$$R^T = \{0, 0, 0, 0, 0, -1000\}$$

В результате решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), матрица коэффициентов при неизвестных и вектор свободных членов,

которые приведены выше, получены вертикальные перемещения узлов, и углы поворота соответственно:

$$Z_1 = -0.0117 м; \quad Z_2 = Z_3 = 0.00692 рад; \quad Z_4 = Z_5 = 0.0005 м;$$

$$Z_6 = 0.08224 м$$

**Выводы.** В рассматриваемой работе предложен новый нетрадиционный математически несложный подход и приведена методика для расчета системы перекрестных балок на упругом основании Винклера на вертикальную нагрузку. Этот подход и методика основаны на классическом методе перемещений для расчета плоских рам на пространственную нагрузку, только в однопролетных балках при определении реакций от внешней нагрузки и единичных смещений учитываются реактивные давления, возникающие на контакте подошвы балки с основанием Винклера.

Численная реализация предлагаемой выше методики осуществлена через компьютерное моделирование системы перекрестных балок на упругом основании Винклера при ее расчете на вертикальную нагрузку с использованием прикладного пакета «МАТНЕМАТИСА».

#### Список цитированных источников

1. Горбунов-Посадов, М.И. Расчет конструкций на упругом основании / М.И. Горбунов-Посадов, Т.А. Маликова, В.И. Соломин. – М.: Стройиздат, 1984. – 631 с.
2. Симвулиди, И.А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании. – М.: Высшая школа, 1987. – 576 с.
3. Семенюк, С.Д. Железобетонные пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно-деформируемом основании. – Могилев: БРУ, 2003. – 269 с.
4. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
5. Жемочкин, Б.Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом / Б.Н. Жемочкин, А.П. Сеницын. – М.: Стройиздат, 1962. – 262 с.
6. Пащевский, Д.П. Применение метода деформаций к расчету балки на упругом основании // Исследования по теории сооружений. – VI. – 1954. – С.249-256.
7. Ржаницын, Р.А. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 439с.
8. Александров, А.В. Сопроотивление материалов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М.: Высшая школа, 2000. – 560 с.
9. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: ФМ, Наука, 1975. – 576 с.

УДК 624.014

## УСТОЙЧИВОСТЬ ФОРМЫ СЕТЧАТЫХ КУПОЛОВ С ЖЁСТКИМИ УЗЛАМИ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Глушко К. К., Драган А. В.

**Введение.** Сетчатые купола часто применяются при необходимости перекрытия больших пролётов. Основные преимущества таких конструкций – низкая материалоемкость, архитектурная выразительность и высокая жёсткость. В то же время особенностью статической работы под нагрузкой таких конст-