

Босаков С.В., Щетько Н.С.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНЫХ БАЛОК ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

В связи с введением новых норм проектирования бетонных и железобетонных конструкций [1], где заложена необходимость учета неупругих свойств материала, определенный теоретический интерес представляет изучение поведения колебаний балок из физически нелинейного материала.

Особенностью свободных колебаний реальных (не идеализированных) балок является тот факт, что колебания являются затухающими, что обусловлено наличием сил сопротивления среды, сил внутреннего трения – демпфирования и, как следствие – потерей энергии колебаний. В инженерной практике [2, 3, 4] наиболее часто рассматриваются 3 вида сил сопротивления: сопротивление пропорциональное скорости, пропорциональное квадрату скорости и внутреннее, т.н. “сухое” трение. Нелинейные колебания – это колебания, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями, к которым приводят именно два последних варианта сил сопротивления. Для описания свободных затухающих колебаний балок примем следующее уравнение [4]:

$$M\ddot{y} + F_c + ry - \beta y^3 = 0, \quad (1)$$

где M – величина массы, y – перемещение, F_c – сила сопротивления, r – жесткость системы в точке приложения массы, β – постоянная, зависящая от упругих свойств материала балки и ее пролета.

Три варианта сил сопротивления описываются следующими выражениями [2]:

$$а) F_c = c \cdot \dot{y}; \quad б) F_c = c \cdot \dot{y} \cdot |\dot{y}|; \quad в) F_c = c \cdot \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|},$$

где точка над параметром перемещения y означает дифференцирование по времени, c – коэффициент сопротивления

1. Рассмотрим свободные затухающие колебания металлической консольной балки с одной степенью свободы (рис. 1) при силе сопротивления F_c , пропорциональной скорости.

Примем закон деформирования материала балки

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - \frac{4}{27} \frac{E^3}{\sigma^2} \varepsilon^3, \quad (2)$$

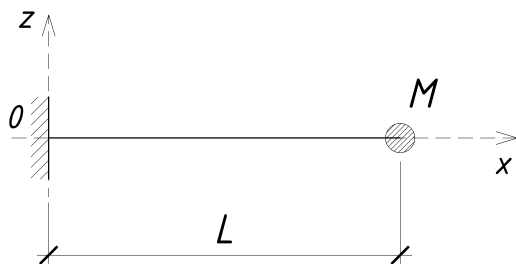
где σ , E – предел прочности и начальный модуль упругости материала балки.

Зададимся законом свободных колебаний балки в виде

$$Z(x, t) = A(t) - \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right), \quad (3)$$

где при $x = L$, $Z = A(t)$.

а)



б)

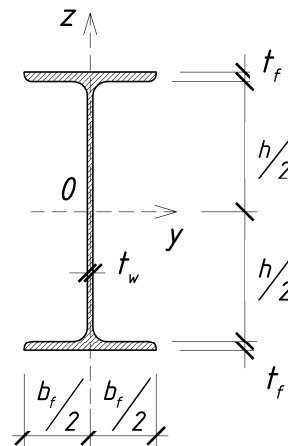


Рис. 1. Консольная балка с сосредоточенной массой (а) и ее поперечное сечение (б).

На основании гипотезы плоских сечений находим

$$\varepsilon = \frac{z}{R} = A(t) \frac{\pi^2 \cdot z}{4 \cdot L^2} \cos \frac{\pi \cdot x}{2 \cdot L}, \quad (4)$$

где $\frac{1}{R}$ – кривизна балки, определяемая выражением

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 Z}{dx^2} = A(t) \frac{\pi^2 z}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L}.$$

Определим энергию изгиба балки при принятом законе деформирования [5]:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L dx \iint_{\Omega} \left(E \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{27} \frac{E^3}{\sigma^2} \varepsilon^4 \right) d\Omega = \\ &= \frac{E\pi^4}{384 \cdot L^3} (6b_f h^2 t_f + 8b_f t_f^3 + h^3 t_w) \cdot A(t) - \\ &\quad - \frac{E^3 \cdot \pi^8}{368640 \cdot L^7 \cdot \sigma^2} \times \\ &\quad \times [10b_f h^4 t_f + 80b_f h^2 t_f^3 + 32b_f t_f^5 + h^5 t_w] \cdot A^3(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где Ω – область интегрирования по сечению двутавра.

Согласно теореме Кастилиано [6], $\frac{\partial U}{\partial A}$ в уравнении (1)

даст нелинейную силу упругости балки в точке приложения массы. Примем для балки из двутавра 30Б2 следующие характеристики: $L = 3$ м; $\sigma = 2,7 \cdot 10^8$ Па; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $M = 1000$ кг.

Для металлических и железобетонных конструкций согласно [4] логарифмический декремент колебаний δ находится в пределах $\delta = 0,1 - 0,15$. Поэтому для $\delta = 0,125$ по формулам:

$$\delta = \kappa T = \kappa \frac{2\pi}{\omega_0}; \quad c = \frac{2\delta}{TM} = \frac{\delta\omega_0}{\pi M}, \quad (6)$$

определяем $c = 1,528 \cdot 10^3$.

В итоге получаем нелинейное дифференциальное уравнение:

$$1000 \frac{d^2 A(t)}{dt^2} + 1,528 \cdot 10^3 \frac{dA(t)}{dt} + 1,47559 \cdot 10^6 A(t) - 1,23788 \cdot 10^8 A^3(t) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) известно [7] под названием уравнения Дюффинга с мягко - нелинейной восстанавливающей силой и допускает точное решение.

На рис. 2 приведены графики колебаний двутавровой консольной балки для линейного (синий цвет) и нелинейного (красный цвет) законов деформирования материала при действии силы сопротивления вида (а) при начальных условиях $A_0 = 0,03$ м и $V_0 = 1$ м/сек, построенные с помощью пакета «Mathematika».

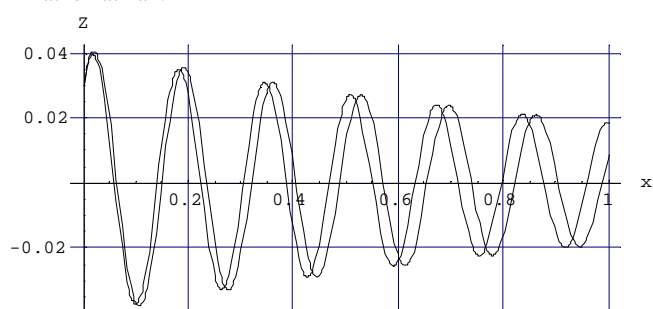


Рис. 2.

Для случая, когда на балку действует нелинейная сила сопротивления вида б, дифференциальное уравнение принимает вид:

$$1000 \frac{d^2 A(t)}{dt^2} + 1,528 \cdot 10^3 \frac{dA(t)}{dt} \cdot \left| \frac{dA(t)}{dt} \right| + 1,47559 \cdot 10^6 A(t) - 1,23788 \cdot 10^8 A^3(t) = 0. \quad (8)$$

Графики колебаний консольной балки при линейном (синий цвет) и нелинейном (красный цвет) законах деформирования при действии нелинейной силы сопротивления представлены на рис.3.

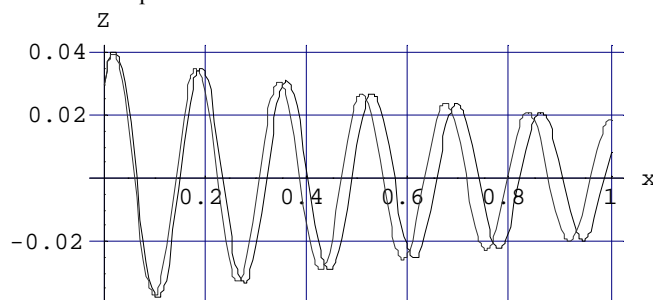


Рис. 3.

Для случая, когда закон сопротивления описывается “сухим” трением, уравнение (1) принимает вид:

$$1000 \frac{d^2 A(t)}{dt^2} + 1,528 \cdot 10^3 \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dA(t)}{\left| \frac{dA(t)}{dt} \right|} + 1,47559 \cdot 10^6 \cdot A(t) - 1,23788 \cdot 10^8 A^3(t) = 0. \quad (9)$$

Решение (9) для двух вариантов сил сопротивления представлено на рис. 4. Для линейного варианта закона деформирования материала балки (синий цвет) действует сила сопротивления вида а, для нелинейного (красный цвет) сила вида в.

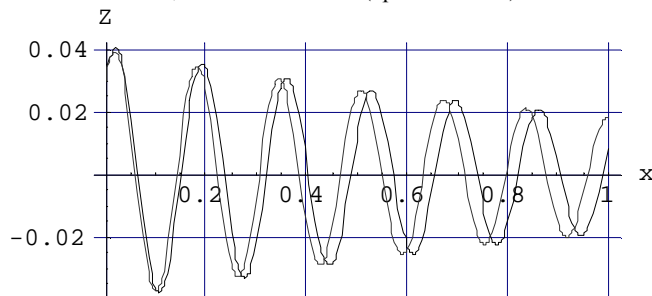


Рис. 4.

На рис. 5 представлены графики колебаний балки для линейного варианта закона деформирования материала (при действии линейной силы сопротивления) и нелинейного при действии каждого из трех видов сил сопротивления при $A_0 = 0,03$ м и $V_0 = 1$ м/сек, построенные с помощью пакета «Mathematika».

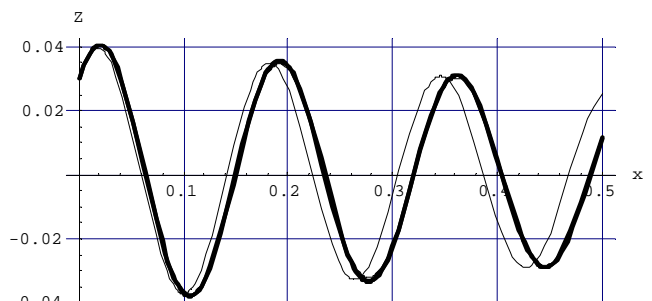


Рис. 5.

Проанализируем поведение балки при трех законах сопротивления с изменением начальных условий. На рис 6. представлены графики колебаний с $A_0 = 0,03$ м и $V_0 = 1$ м/сек (6а), при $M = 2000$ кг, $A_0 = 0,015$ м, $V_0 = 1$ м/сек (6б).

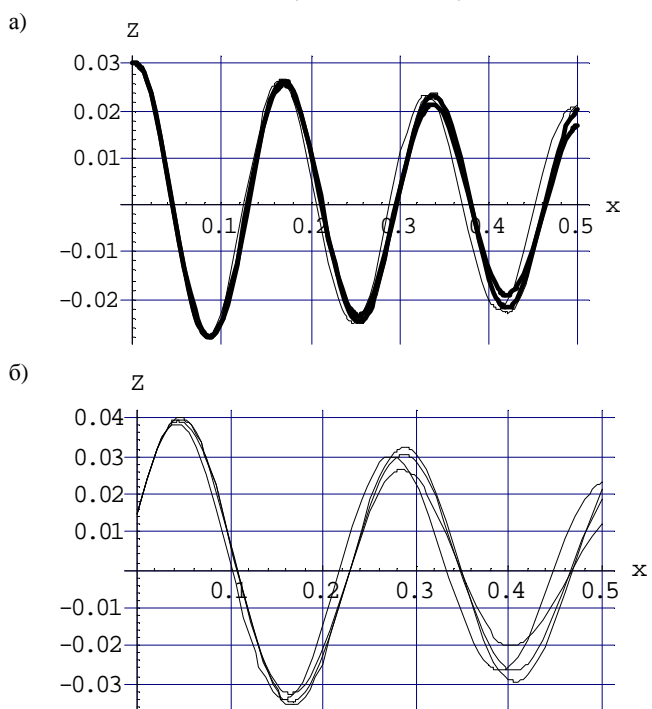


Рис. 6.

2. Рассмотрим консольную балку прямоугольного поперечного сечения размером $b \cdot h$ и предположим, что материал ее подчиняется закону деформирования

$$\sigma(\varepsilon) = R_b \tanh \left[\frac{E_b}{R_b} \varepsilon \right], \quad (10)$$

где R_b, E_b – прочность и начальный модуль упругости материала балки;

$\tanh(z)$ – гиперболический тангенс.

Задаваясь уравнением свободных колебаний в виде (3), после определения кривизны (4) вычислим энергию изгиба:

$$U = \frac{2R_b^2}{E_b} \int_0^L \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{A^2 E_b^2 h^3 \pi^4 \cos \left[\frac{\pi x}{2L} \right]^2}{768 L^4 R_b^2} - \frac{A^4 E_b^4 h^5 \pi^8 \cos \left[\frac{\pi x}{2L} \right]^4}{491520 L^8 R_b^4} + \frac{A^6 E_b^6 h^7 \pi^{12} \cos \left[\frac{\pi x}{2L} \right]^6}{165150720 L} \right) dy dx = \frac{A^2 b E_b h^3 \pi^4 (5 A^4 E_b^4 h^4 \pi^8 - 2016 A^2 E_b^2 h^2 L^4 \pi^4 R_b^2 + 1720320 L^8 R_b^4)}{1321205760 L^{11} R_b^4} \quad (11)$$

обозначим $\alpha = \frac{E_b \pi^2}{4 R_b L^2} A \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right)$.

Разлагая (11) в степенной ряд по параметру α и дифференцируя по A для получения нелинейной силы упругости R [8], получаем при удержании трех первых членов степенного ряда

$$R = \frac{A^5 b \cdot E_b^5 \cdot h^7 \pi^{12}}{44040192 L^1 R_b^4} - \frac{A^3 b E_b^3 h^5 \pi^8}{163840 L^7 R_b^2} + \frac{A b E_b h^3 \pi^4}{384 L^3}. \quad (12)$$

На основании (12) получим нелинейное дифференциальное уравнение для железобетонной балки при следующих данных: $L = 3$ м, $M = 750$ кг, $b = 0,2$ м, $h = 0,4$ м, бетон класса С25/30 марки Ж1, Ж2: $E_{cm} = 3,8 \cdot 10^{10}$ Па, $f_{ck} = 2,5 \cdot 10^7$ Па и разрешающее уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 4569809 \cdot A - 4761359615 \cdot A^3 = 0. \quad (13)$$

Уравнение свободных колебаний балки при линейном законе деформирования и линейной силе сопротивления будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - 2,33 \cdot \frac{\partial A}{\partial t} + 6093,08 \cdot A = 0, \quad (14)$$

где $c = 2,33 \cdot 10^3$ при $\delta = 0,125$ (6).

На рис. 7 приведён график колебаний, описываемых уравнением (14) при $A_0 = 0,03$ м и $V_0 = 0,1$ м/сек.

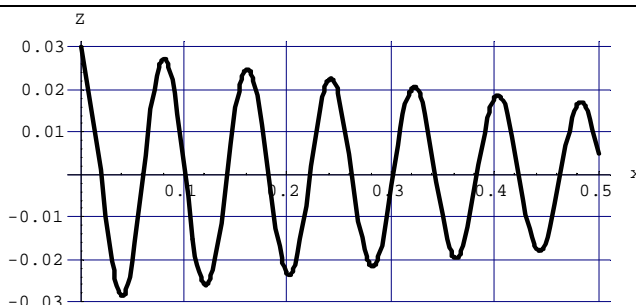


Рис. 7. График свободных колебаний железобетонной балки при линейном законе деформирования материала и линейной силе сопротивления.

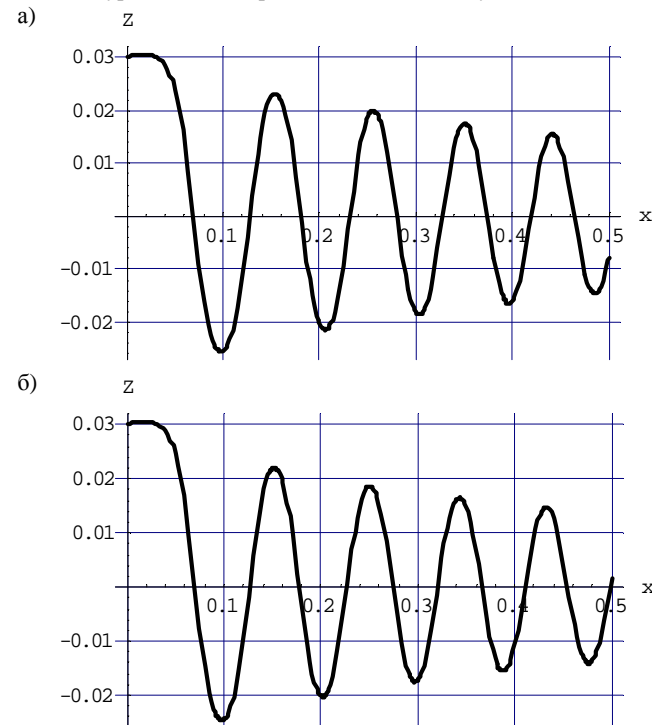
Для каждого из 3 видов сил сопротивления, описанных выше, получаем следующие уравнения затухающих колебаний:

$$a) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - 2,33 \cdot \frac{\partial A}{\partial t} + 6093,08 \cdot A - 6348479,49 \cdot A^3 - \dots = 0 \quad (15)$$

$$b) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - 2,33 \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right| + 6093,08 \cdot A - 6348479,49 \cdot A^3 - \dots = 0 \quad (16)$$

$$в) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - 2,33 \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right| + 6093,08 \cdot A - 6348479,49 \cdot A^3 - \dots = 0 \quad (17)$$

На рис. 8 приведены графики колебаний, описываемых данными уравнениями при тех же начальных условиях (14).



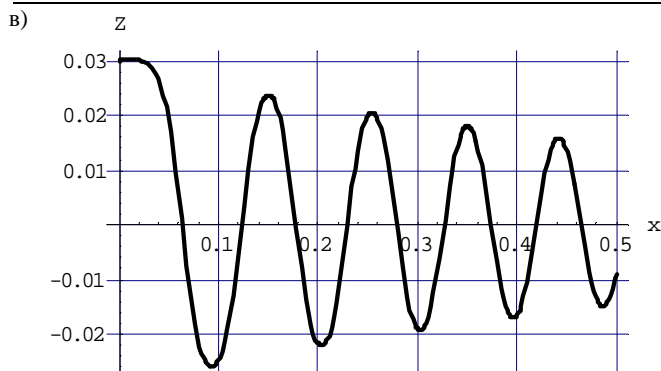


Рис. 8. Графики свободных колебаний балки из нелинейно-упругого материала при действии каждого вида из сил сопротивления.

Для наглядности все 4 графика представим на одной координатной плоскости:

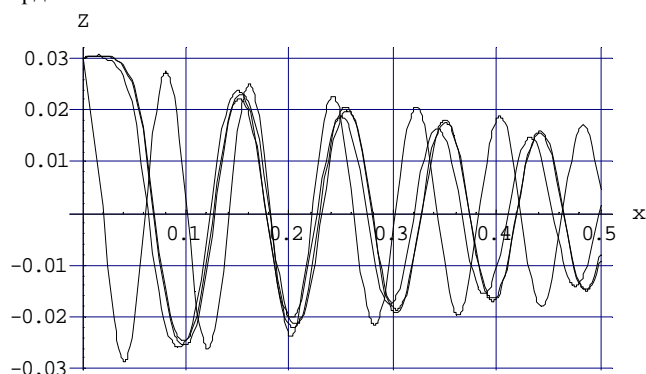


Рис. 9. Графики свободных затухающих колебаний железобетонной балки прямоугольного сечения (зависимость амплитуды от времени).

Увеличим массу на балке до 1000 кг и изменим начальные условия. Графики свободных затухающих колебаний балки при $M = 1000$ кг $A_0 = 0,015$ м, $V_0 = 0,2$ м/сек представлены на рис. 10.

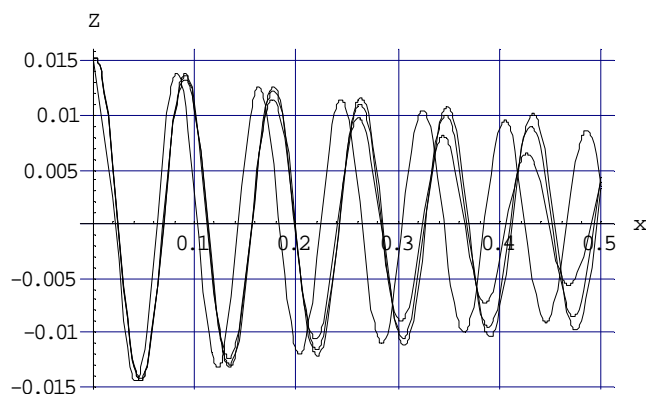


Рис. 10.

По графикам рис. 2 – рис. 10 можно составить ясное представление о влиянии нелинейной силы сопротивления на колебания балки.

3. Изучим поведение консольной балки с двумя степенями свободы

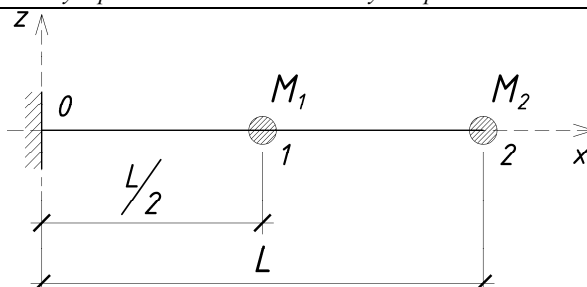


Рис. 11. Консольная балка с двумя степенями свободы.

Зададимся законом колебаний балки в форме

$$Z(x, t) = A_1(t) \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) + A_3(t) \left(1 - \cos \frac{3\pi x}{2L}\right). \quad (18)$$

Причем:

$$Z_1\left(\frac{L}{2}, t\right) = A_1(t) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + A_3(t) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (19)$$

$$Z_2(L, t) = A_1(t) + A_3(t)$$

Откуда следует:

$$A_1(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} Z_1\left(\frac{L}{2}, t\right) + \frac{1 + \sqrt{2}}{2} Z_2(L, t) \quad (20)$$

$$A_3(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} Z_1\left(\frac{L}{2}, t\right) + \frac{\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2}} Z_2(L, t)$$

Законы движения колеблющихся масс можно записать в виде уравнений:

$$\begin{cases} M_1 \frac{d^2 Z_1}{dt^2} + c \frac{dZ_1}{dt} + R_1 = 0 \\ M_2 \frac{d^2 Z_2}{dt^2} + c \frac{dZ_2}{dt} + R_2 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

где R_1, R_2 – силы нелинейной упругости балок в местах приложения масс на балке.

На основании (20) можно получить:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\partial U}{\partial Z_1} = \frac{\partial U}{\partial A_1} \frac{\partial A_1}{\partial Z_1} + \frac{\partial U}{\partial A_3} \frac{\partial A_3}{\partial Z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial U}{\partial A_1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial U}{\partial A_3}; \\ R_2 &= \frac{\partial U}{\partial Z_2} = \frac{\partial U}{\partial A_1} \frac{\partial A_1}{\partial Z_2} + \frac{\partial U}{\partial A_3} \frac{\partial A_3}{\partial Z_2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \frac{\partial U}{\partial A_1} + \frac{\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2}} \frac{\partial U}{\partial A_3}, \end{aligned} \quad (22)$$

где U – энергия изгиба колеблющейся балки.

Выразим энергию U в виде функции от A_1 и A_3 , приняв закон деформирования материала балки в виде (2). По формулам (22) для двутавра 30Б2 и $L = 3$ м, $M_1 = 1500$ кг, $M_2 = 500$ кг. Получим необходимые силы упругости в следующем виде:

$$R_1 = A_1(t) \left[1,47559 \cdot 10^6 - 1,23788 \cdot 10^8 A_1^2(t) - 1,11409 \cdot 10^9 A_1(t) A_3(t) - 2,00536 \cdot 10^{10} A_3^2(t) \right]; \quad (23)$$

$$R_2 = 3,71363 \cdot 10^8 A_1^3(t) - 1,19523 A_3(t) \cdot 10^8 - 2,00536 \cdot 10^{10} A_1^2(t) A_3(t) - 8,12171 \cdot 10^{11} A_3^3(t).$$

Численное решение получено с помощью пакета "Mathematika". На рис. 12. приведены графики колебаний точек расположения масс при начальных условиях $A_1(0) = 0,001$ м; $A_3(0) = -0,01$ м; $A_1'(0) = A_3'(0) = 0$ м/сек.

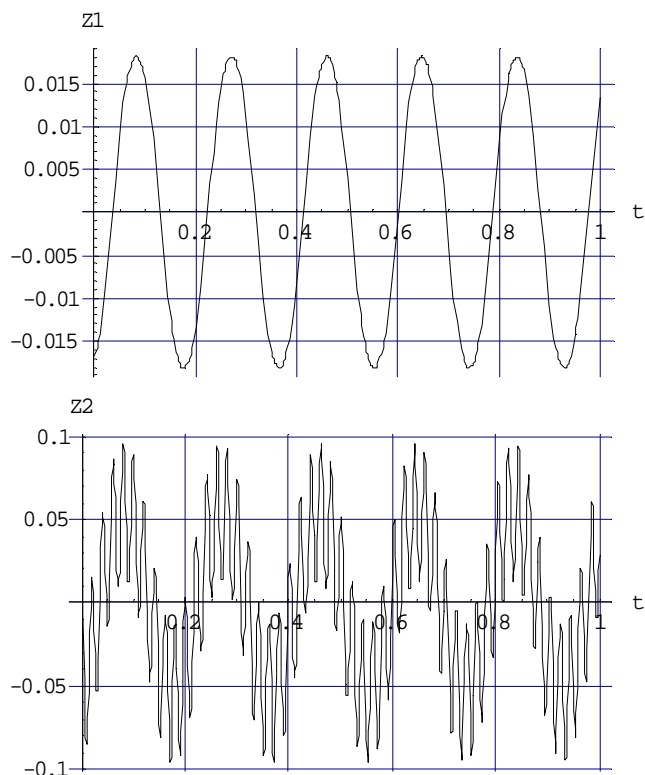


Рис. 12. Графики колебаний точек расположения масс на консольной балке.

Рассмотрим ж/б консольную балку прямоугольного сечения. Примем закон деформирования материала балки в виде (2). По формулам (22) для прямоугольного сечения при $h = 0,4$ м, $b = 0,2$ м и $L = 3$ м; $M_1 = 1500$ кг; $M_2 = 500$ кг получим необходимые силы упругости.

$$R_1 = A_1(t) \cdot [4,56981 \cdot 10^6 - 2,11616 \cdot 10^9 A_1(t)^2 - 1,90454 \cdot 10^{10} A_1(t) A_3(t) - 3,42818 \cdot 10^{11} A_3(t)^2]; \quad (24)$$

$$R_2 = 6,34848 \cdot 10^9 A_1(t)^3 - 3,70155 \cdot 10^8 A_3(t) - 3,42818 \cdot 10^{11} A_1(t)^2 A_3(t) - 1,38841 \cdot 10^{13} A_3(t)^3].$$

Законы движения колеблющихся масс будут аналогичны (21), т.е.:

$$\begin{cases} M_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + c \frac{dz_1}{dt} + R_1 = 0; \\ M_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + c \frac{dz_2}{dt} + R_2 = 0. \end{cases}$$

Численное решение системы уравнений получено с помощью пакета "Mathematika". На рис. 13 приведены графики

колебаний точек расположения масс при начальных условиях: $A_1(0) = 0,001$ м; $A_3(0) = -0,003$ м; $A_1'(0) = A_3'(0) = 0$ м/сек.

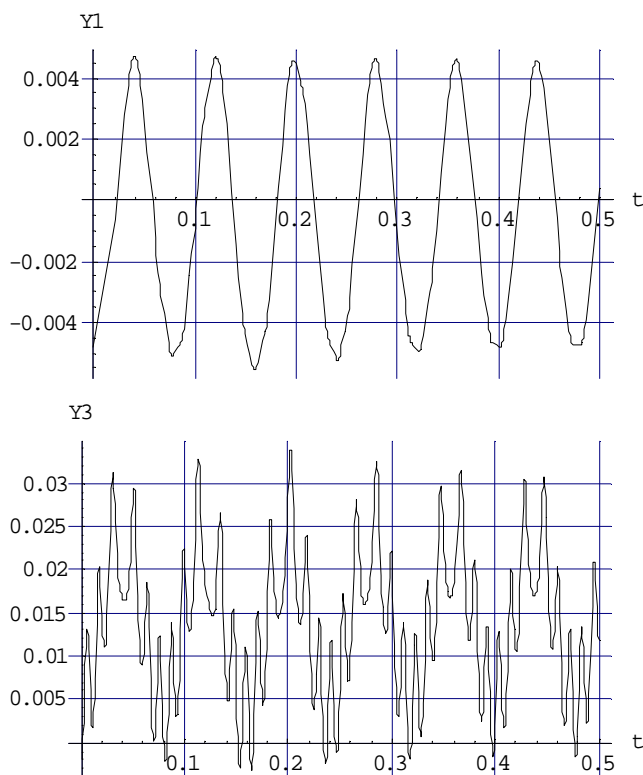


Рис. 13. Графики колебаний точек расположения масс на консольной балке прямоугольного поперечного сечения.

Анализ результатов теоретического исследования свободных затухающих колебаний консольных балок, материал которых подчиняется двум нелинейным законам деформирования и силы сопротивления представлены тремя видами зависимостей, позволяет сделать вывод, что учет действительных диаграмм деформирования материала при решении задач динамики необходим, позволяет более полно раскрыть поведение конструкций и происходящие при этом процессы, более точно определить амплитудно-частотные характеристики систем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. СНБ 5.03.01 – 02. Бетонные и железобетонные конструкции. – Мн., 2003. – 139 с.
2. Вибрации в технике справочник в 6 томах. Том 2. Нелинейные колебания механических систем. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
3. С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер. Колебания в инженерном деле. – М., 1985. – 472 с.
4. Дж. Стокер. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М., 1953. – 264 с.
5. Босаков С.В. Метод Ритца в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости. – Мн., 2000. – 144 с.
6. А.Р. Ржаницын. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 438 с.
7. Найфэ А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
8. Справочник по динамике сооружений. Под ред. Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. Стройиздат, 1972. – 511 с.
9. А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.