Весці БДПУ. Серыя 3. 2019. № 4. С. 16–22.

УДК 517.9

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. СМЕШАННЫЙ СЛУЧАЙ

А. И. Жук,
кандидат физико-математических наук, доцент, Брестский государственный технический университет;

О. Л. Яблонский,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики БГУ;

С. А. Спасков,
ассистент кафедры функционального анализа и аналитической экономики БГУ

Поступила в редакцию 10.10.19.

UDC 517.9

ASSOCIATED SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF NONAUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GENERALIZED CORFFICIENTS. MIXED CAS

A. Zhuk,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank;

O. Yablonskiy,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Functional Analysis and Analytical Economics, BSU;

S. Spaskov,
Assistant of the Department of Functional Analysis and Analytical Economics, BSU

Received on 10.10.19.

В работе исследуется задача Коши для системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Предложен способ трактовки решений уравнений, постановка которых в рамках классической теории обобщенных функций некорректна. Этот подход позволяет с единых позиций охватить решения, получаемые с помощью других подходов, а также получить новые решения.

Ключевые слова: задача Коши, система неавтономных дифференциальных уравнений, конечно-разностные с осреднением уравнения, ассоциированные решения.

The Cauchy problem for the system of non-autonomous differential equations with generalized coefficients has been investigated. Interpretation of solutions for the system can not be done in the classical distribution theory. The approach for interpretation of solution is introduced. It allows to obtain the solutions provided by different approaches from a single perspective and also allows to find new solutions.

Keywords: the Cauchy problem, system of non-autonomous differential equations, finite difference with averaging equations, associated solution.

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t), i = \overline{1,p}$$

$$x(0) = x_0, \qquad (1)$$

где f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ – липшицевы функции, $[x(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots x^p(t)]$, $x_0 \in \mathbb{R}^p$, а $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке T. Будем считать, что функции $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$ непрерывны справа, $L^i(0) = L^i(0-) = 0$ и $L^i(a-) = = L^i(a-)$, $j = \overline{1,q}$. При решении этой задачи возникают принципиально неразрешимые трудности, связанные с невозможностью корректного определения произведения обобщенных функций. Рассмотрим основные подходы, которые предпринимались, чтобы корректно определить решение задачи (1). Первый подход – исследование поставленной задачи в рамках теории обобщенных функций и решение проблемы умножения разрывных функций на обобщенные, которая возникает в выражении $f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t)$.

В работе [1] вводится определение произведения разрывной функции на обобщенную, а затем ищется решение дифференциального уравнения. Второй подход предполагает формальный переход к интегральному уравнению (см., например, [2]), где интеграл понимается в определенном смысле, например, в смысле Лебега – Стилтьеса, Перрона – Стилтьеса и т. д. Однако при таком толковании решение интегрального уравнения будет зависеть от определения интегрируемой функции в точках разрыва и от типа интеграла. Третий подход [3] опирается на идею аппроксимации искомого решения уравнения (1) решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что решения, полученные в разных работах, даже в рамках одного подхода, вообще говоря, различны. В работе [4] показано, что эти подходы можно охватить одним, основанным на исследовании предельного поведения решений представлений исходной задачи в виде соответствующих конечно-разностных с осреднением задач (см. [4], [5]). Таким образом, далее под решением задачи (1) будем понимать предел решения соответствующей конечно-разностной с осреднением задачи, в случае его существования, и будем называть его ассоциированным решением задачи (1). Аналогичные системы при различных условиях изучались в [7–9]. В данной статье исследуется наиболее общий случай, включающий в себя предыдущие результаты.

Рассматриваемая краевая задача (1), в рамках данного подхода, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{gathered} x_n^i(t+h_n)-x_n^i(t)= \\ =\sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t,x_n(t))[L_n^j(t+h_n)-L_n^j(t)], i=\overline{1,p} \\ x_n(t)\,|_{[0,h_n)}=x_{n0}(t) \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь

$$L_n^j(t)=(L^j*\rho_n^j)(t)=\int_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}} L^j(t+s)\rho_n^j(s)ds,$$

где $\rho_n^j(t)=\gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t)$, $p^j \geq 0$,

$\operatorname{supp}\rho^j \subseteq [0,1]$, $\int_0^1 \rho^j(s)ds=1$, $f_n=f*\tilde{\rho}_n$,

$\tilde{\rho}_n(x_0,...,x_p)=n^{p+1}\tilde{\rho}(nx_0,...,nx_p)$, $\tilde{\rho}\geq 0$,

$\operatorname{supp}\ \tilde{\rho}\subset[0,1]^{p+1}$. $\int_{[0,1]^{p+1}}\tilde{\rho}(x_0,...,x_p)dx_0...dx_p=1$.

Цель настоящей работы – исследовать предельное поведение решения задачи (2) при $n\to\infty$ и $h_n\to 0$ так, что $\gamma^j(n)\to\infty$ и при этом при некотором фиксированном $0 \leq b \leq q$, не зависящем от n, выполняется $\gamma^j(n)h_n\to\infty$ для всех $j=\overline{1,b}$ и $\gamma^j(n)h_n\to 0$ для $j=\overline{b+1,q}$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t=\tau_t+m_t h_n$, где $\tau_t\in[0,h_n)$, $m_t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. При фиксированном t обозначим , $t=\tau_t+kh_n$, $k\in\mathbb{Z}$. Несложно видеть, что решение системы (2) можно записать в виде

$$\begin{gathered} x_n^i(t)=x_{n0}^i(\tau_t)+\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(t_k,x_n(t_k))[L_n^j(t_{k+1})- \\ -L_n^j(t_k)], i=\overline{1,p}. \end{gathered} \tag{3}$$

Для описания предельного поведения задачи (2) рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered} x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(s,x(s))dL^{jc}(s)+ \\ +\sum_{\mu_r\leq t} S^i(\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)), i=\overline{1,p}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $S^i(\mu,x,u)=\varphi^i(\mu,x,u)-\varphi^i(0,\mu,x,u)$, $\mu\in T$, $x\in\mathbb{R}^p$, $u\in\mathbb{R}^q$, $i=\overline{1,p}$, а $\varphi^i(t,\mu,x,u)$ находится из уравнения

$$\begin{gathered} \varphi^i(t,\mu,x,u)=x^i+ \\ +\sum_{j=1}^{b} u^j\int_0^t f^{ij}(\mu,\varphi(s-,\mu,x,u))dH(s-1)+ \\ +\sum_{j=b+1}^{q} u^j\int_0^t f^{ij}(\mu,\varphi(s,\mu,x,u))ds. \end{gathered}$$

Здесь $x=(x^1,\ldots x^p)$, $u=(u^1,\ldots,u^q)$, $H(t)$ – функция Хевисайда, то есть $H(s)=1$ при $s\geq 0$ и $H(s)=0$ при $s<0$, $L^{jc}(t)$ – непрерывная составляющая функции $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r)=L^d(\mu_r+)-L^d(\mu_r-)$. Из результатов статьи [6] вытекает, что решение системы (4) существует и единственно для всех значений параметров $\mu\in T$, $x\in\mathbb{R}^p$, $u\in\mathbb{R}^q$.

В следующей лемме утверждается справедливость неравенства – дискретного аналога неравенства Грануола. Лемма является очевидным следствием леммы 4.2 статьи [5].

Лемма 1. *Пусть для любого* $n=0,1,2\ldots$ *справедливо неравенство* $Z_{n+1}\leq\left(A+\sum_{k=1}^{n}A_k\exp\left(\sum_{k=1}^{n}B_kZ_k\right)\right)$, *где* A, A_k, B_k *– некоторые неотрицательные константы и* $Z_k\geq 0$, $k=\overline{1,n}$. *Тогда верно неравенство*

$$Z_{n+1} \le \left(A + \sum_{k=1}^{n} A_k \exp\left(\sum_{k=1}^{n} B_k Z_k \right) \right),$$

Так как функция $L^j(\cdot)$ имеет не более чем счетное число точек разрыва и ее вариация конечна, то $\sum_{r=1}^{\infty} |\Delta L^j(\mu_r)| < +\infty$. Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum_{j=1}^{q} \sum_{r=n_0}^{\infty} |\Delta L^j(\mu_r)| < \varepsilon.$ Далее представим $L^{jd}(\cdot)$, разрывную часть L^j в виде

$$L^{jd}(t) = L^{jd,\ge n_0}(t) + L^{jd,<n_0}(t), \qquad (5)$$

где $L^{jd,\ge n_0}(\cdot)$ и $L^{jd,<n_0}(\cdot)$ содержат точки разрывов μ_r с номерами, большими либо равными n_0, то есть $r \ge n_0$, и меньшими n_0, то есть $r < n_0$, соответственно. Так как функция $L^{jd,<n_0}$ имеет $n_0 - 1$ точку разрыва на отрезке T, то существует конечное число номеров k_r таких, что $\mu_r - \frac{1}{\gamma^j(n)} \in [t_{k_r^j}, t_{k_r^j+1})$, причем, если $h_n + \frac{1}{\gamma^j(n)} < \frac{1}{2} \min_{1 \le s,r \le n_0-1} |\mu_s - \mu_r|$, то $k_r^j \ne k_s^j$ при $r \ne s$. Положим $\xi_k^{rj} = \int_{\mu_r-(k_r^j+k)h_n-\tau_t}^{\frac{1}{\gamma^j(n)}} \rho_n^j(s)ds$, тогда $0 = \xi_0^{rj} \le \xi_1^{rj} \le \ldots \le \xi_{l^j+2}^{rj} = 1$, где $l^j = [\frac{1}{\gamma^j(n)h_n}]$, также везде далее C – константа, не зависящая от n, t, h_n, под модулем вектора $x \in \mathbb{R}^p$ будем понимать норму $\|x\| = \max_{1 \le i \le n} |x^i|$, обозначим также $\gamma^{\nu}(n) = \min_j \gamma^j(n)$.

Лемма 2. *Пусть x_n – решение (2),* $k_r^j \le k_r^{\beta}$, $\beta = \overline{b+1,q}$ и $Q_{\alpha}^j = \sum_{\theta=1}^{p} \sum_{\beta=b+1}^{q} {}^{\theta}V_{\alpha}^{j\beta}$

$${}^{\theta}V_{\alpha}^{j\beta} = |\sum_{k=0}^{\alpha} f_n^{\theta\beta}(t_{k+k_r^j}, x_n(t_{k+k_r^j})) \times$$
$$\times(\xi_{k_r^j-k_r^{\beta}+k+1}^{r\beta} - \xi_{k_r^j-k_r^{\beta}+k}^{r\beta}) -$$
$$- \int_0^{\xi_{k_r^j-k_r^{\beta}+\alpha+1}^{r\beta}} f^{\theta\beta}(\mu_r, \varphi(s, \mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r)))ds |,$$

где $\alpha = 0, 1, 2, \ldots l^j - 1$ *и* $b + 1 \le j \le q$. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *при достаточно больших* n *и* $t \notin \bigcup_{r=1}^{n_0} (\mu_r - \frac{1}{\gamma^{\nu}(n)}, \mu_r)$ *имеем*

$$Q_{\alpha}^j \le C \sum_{i=1}^{p} |x_n^i(t_{k_r^j}) - x^i(\mu_r -)| +$$
$$+ C \sum_{m=1}^{q} \underset{t \in (\mu_r - \frac{1}{\gamma^j(n)} - h_n, \mu_r)}{var} L^{mc}(t) +$$
$$+ C \sum_{\beta=b+1}^{q} \gamma^{\beta}(n) h_n + C\frac{1}{n} + C\varepsilon.$$

Доказательство леммы непосредственно следует из определений функций $x_n(t)$, $\varphi(t, \mu, x, u)$ и леммы 1.

Следующая теорема показывает, что решение уравнения (4) является ассоциированным решением задачи Коши (1).

Теорема. Пусть f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Пусть b – некоторое фиксированное целое число, $0 \le b \le q$, и пусть при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ выполняется $\gamma^j(n)h_n \to \infty$ для всех $j = \overline{1,b}$ и $\gamma^j(n)h_n \to 0$ для всех $j = b + \overline{1,q}$. Тогда если $\int_T |x_{n0}^i(\tau_t) - x_0^i| dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для всех $j = \overline{1,q}$, то решение $x_n(t)$ задачи Коши (2) сходится к решению системы (4) в $L^1(T)$.

Доказательство.

Проделаем следующие преобразования

$$| x_n^1(t) - x^1(t) | \le | x_{n0}^1(\tau_t) - x_0^1 | +$$
$$+ \sum_{j=1}^{q} | \int_0^{\tau_t} f^{1j}(s, x(s)) dL^{jc}(s) | +$$
$$+ \sum_{j=1}^{q} | \sum_{k=0}^{m_t-1} (f_n^{1j}(t_k, x_n(t_k)) -$$
$$- f^{1j}(t_k, x(t_k)))[L_n^{jc}(t_{k+1}) -$$
$$- L_n^{jc}(t_k)] | + \sum_{j=1}^{q} | \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(t_k, x(t_k))[L_n^{jc}(t_{k+1}) -$$
$$- L_n^{jc}(t_k)] -$$
$$- \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(t_k, x(t_k))[L^{jc}(t_{k+1}) - L^{jc}(t_k)] | +$$
$$+ \sum_{j=1}^{q} | \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(t_k, x(t_k))[L^{jc}(t_{k+1}) -$$
$$- L^{jc}(t_k)] -$$

$$-\int_{\tau_t}^{t} f^{1j}(s,x(s))dL^{jc}(s)|+$$

$$+|\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(t_k,x_n(t_k))[L_n^{jd}(t_{k+1})-$$

$$-L_n^{jd}(t_k)]-$$

$$-\sum_{\mu_r\le t} S^1(\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r))|=$$

$$=I_0(t)+\sum_{j=1}^{q}(I_1^j(t)+I_2^j(t)+$$

$$+I_3^j(t)+I_4^j(t))+I_5(t).$$

Так как f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены, функции $L^i(t)$, $i=\overline{1,q}$ имеют ограниченную вариацию, используя вид $x(t)$, свойства интеграла Стилтьеса, получим следующие оценки:

$$I_1^j(t)\le C\underset{t\in[0,h_n)}{var} L^{jc}(t);$$

$$I_2^j(t)\le C\sum_{k=0}^{m_t-1}(|x_n(t_k)-x(t_k)|+$$

$$+\frac{1}{n})|L_n^{jc}(t_{k+1})-L_n^{jc}(t_k)|;$$

$$I_3^j(t)\le C\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ |t_1-t_2|\le\frac{1}{\gamma^j(n)}}}$$

$$\underset{t\in[t_1,t_2]}{var} L^{jc}(t)+Ch_n.$$

$$I_4^j(t)\le C\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ |t_1-t_2|\le\frac{1}{\gamma^j(n)}+h_n}}$$

$$\underset{t\in[t_1,t_2]}{var} L^{jc}(t)+Ch_n.$$

Рассмотрим $I_5(t)$. Используя представление $L^{jd}(\cdot)$ в виде (5) и соответствующие ему обозначения, получим

$$I_5(t)\le$$

$$\le\left|\sum_{j=1}^{b}\left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(t_k,x_n(t_k))\left[L_n^{jd,<n_0}(t_{k+1})-L_n^{jd,<n_0}(t_k)\right]-\right.\right.$$

$$-\sum_{\mu_r\le t}\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)\times$$

$$\times\int_0^1 f^{1j}(\mu_r,\varphi(s-,\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)))dH(s-1)\Big]|+$$

$$+\sum_{j=1}^{b}\left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(t_k,x_n(t_k))\left[L_n^{jd,\ge n_0}(t_{k+1})-L_n^{jd,\ge n_0}(t_k)\right]-\right.$$

$$-\sum_{\mu_r\le t}\Delta L^{jd,\ge n_0}(\mu_r)\times$$

$$\times\int_0^1 f^{1j}(\mu_r,\varphi(s-,\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)))dH(s-1)]|+$$

$$+\left|\sum_{j=b+1}^{q}\left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(t_k,x_n(t_k))\times\right.\right.$$

$$\times[L_n^{jd,<n_0}(t_{k+1})-L_n^{jd,<n_0}(t_k)]-$$

$$-\sum_{\mu_r\le t}\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)\times$$

$$\times\int_0^1 f^{1j}(\mu_r,\varphi(s,\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)))ds]|+$$

$$+\left|\sum_{j=b+1}^{q}\left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(t_k,x_n(t_k))\left[L_n^{jd,\ge n_0}(t_{k+1})-L_n^{jd,\ge n_0}(t_k)\right]-\right.\right.$$

$$-\sum_{\mu_r\le t}\Delta L^{jd,\ge n_0}(\mu_r)\times$$

$$\times\int_0^1 f^{1j}(\mu_r,\varphi(s,\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)))ds]|=$$

$$=\sum_{j=1}^{b} I_5^{j1}(t)+\sum_{j=1}^{b} I_5^{j2}(t)+$$

$$+\sum_{j=b+1}^{q} I_5^{j3}(t)+\sum_{j=b+1}^{q} I_5^{j4}(t).$$

Далее, используя лемму 2, то, что $I^j=0$ при $j=\overline{1,b}$ определения функций $x_n(t)$ и $\varphi(t,\mu,x,u)$, для достаточно больших n и $t\notin\bigcup_{r=1}^{n_0}(\mu_r-\frac{1}{\gamma^\nu(n)},\mu_r)$ получим

$$I_5^{j1}(t)\le C\sum_{\mu_r\le t}|\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)|(\sum_{i=1}^{p}|x_n^i(t_{k_r^\nu})-$$

$$-x^i(\mu_r-)|+\sum_{\beta=1}^{q}\underset{t\in(\mu_r-\frac{1}{\gamma^j(n)}-h_n,\mu_r)}{var} L^{\beta c}(t)+$$

$$+\sum_{m=b+1}^{q}\gamma^m(n)h_n+\frac{1}{n}+\varepsilon+\frac{1}{\gamma^j(n)}+h_n+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\sum_{m=b+1}^{q}|\Delta L^m(\mu_r)|(1-\xi_{k_r^j-k_r^m}^{rm})+$$

$$+C\sum_{i=1}^{p}\sum_{m=1}^{b}|\Delta L^m(\mu_r)|\times$$

$$\times|\sum_{z=0}^{k_r^j-k_r^\nu-1} f^{im}(t_{k_r^\nu+z},x_n(t_{k_r^\nu+z}))$$

$$(\xi_{k_r^\nu-k_r^m+z+1}^{rm}-\xi_{k_r^\nu-k_r^m+z}^{rm})|+$$

$$+|(f_n^{1j}(t_{k_r^j},x_n(t_{k_r^j}))-$$

$$-f_n^{1j}(t_{k_r^j+1},x_n(t_{k_r^j+1})))(\xi_2^{rj}-\xi_1^{rj})|).$$

Для $I_5^{j2}(t)$ для любого $\varepsilon > 0$ при $n_0 \to \infty$ имеем $\sum_{j=1}^{b} I_5^{j2}(t) \le C\varepsilon$.

Из леммы 2, при достаточно больших n и $t \notin \bigcup_{r=1}^{n_0}(\mu_r - \frac{1}{\gamma^{\nu}(n)}, \mu_r)$ получим

$$I_5^{j3}(t) \le C\sum_{\mu_r \le t} |\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)| \times$$
$$\times(\sum_{i=1}^{p} |x_n^i(t_{k_r^j}) - x^i(\mu_r -)| +$$
$$+\sum_{\beta=1}^{q} \underset{t\in(\mu_r - \frac{1}{\gamma^j(n)} - h_n, \mu_r)}{var} L^{\beta c}(t) +$$
$$+\sum_{j=b+1}^{q} \gamma^j(n)h_n + \frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{1}{\gamma^j(n)} + h_n).$$

Аналогично $I_5^{j2}(t)$ для $I_5^{j4}(t)$ имеем $I_5^{j4}(t) \le C\varepsilon$.

Используя полученные оценки при достаточно больших n и $t \notin \bigcup_{r=1}^{n_0}(\mu_r - \frac{1}{\gamma^{\nu}(n)}, \mu_r)$ получим

$$| x_n(t) - x(t) | \le \sum_{i=1}^{p} |x_{n0}^i(\tau_t) - x_0^i| +$$
$$+C\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1} |x_n(t_k) -$$
$$-x(t_k)|(|L_n^{jc}(t_{k+1}) -$$
$$-L_n^{jc}(t_k)| + C) +$$
$$+C\sum_{j=1}^{q} \max_{\substack{t_1,t_2\in T \\ |t_1-t_2|\le \frac{1}{\gamma^j(n)} + h_n}} \underset{t\in[t_1,t_2]}{var} L^{jc}(t) +$$
$$+Ch_n + C\sum_{j=1}^{b}\sum_{\mu_r \le t} |\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)| \times$$
$$\times(\frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{1}{\gamma^j(n)} + h_n +$$
$$+\sum_{m=b+1}^{q} |\Delta L^m(\mu_r)|(1 - \xi_{k_r^j - k_r^m}^{rm}) +$$
$$+\sum_{i=1}^{p}\sum_{m=1}^{b} |\Delta L^m(\mu_r)|| \times$$
$$\times \sum_{z=0}^{k_r^j - k_r^{\nu} - 1} f^{im}(t_{k_r^{\nu}+z}, x_n(t_{k_r^{\nu}+z})) \times$$
$$\times(\xi_{k_r^{\nu} - k_r^m + z+1}^{rm} - \xi_{k_r^{\nu} - k_r^m + z}^{rm})| +$$
$$+|(f_n^{1j}(t_{k_r^j}, x_n(t_{k_r^j})) -$$
$$-f_n^{1j}(t_{k_r^j+1}, x_n(t_{k_r^j+1})))(\xi_2^{rj} - \xi_1^{rj})|) +$$
$$+C\sum_{j=1}^{q}\sum_{\mu_r \le t} |\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)|(\sum_{m=b+1}^{q} \gamma^m(n)h_n +$$
$$+ \max_{\substack{t_1,t_2\in T, |t_1-t_2|\le \frac{1}{\gamma^j(n)} + h_n}} \underset{t\in[t_1,t_2]}{var} L^j(t)).$$

Введем обозначение $T_n = \bigcup_{k=0}^{m_t-1}\bigcup_{r=1}^{n_0}(kh_n + \mu_r - \frac{1}{\gamma^{\nu}(n)}, kh_n + \mu_r)$. Применяя лемму 1 к последнему неравенству, при достаточно больших n получим

$$\int_T |x_n(t) - x(t)| dt \le \int_{T\backslash T_n} \sum_{i=1}^{p} |x_{n0}^i(\tau_t) -$$
$$-x_0^i| dt + C\int_{T\backslash T_n} \sum_{j=1}^{q} \max_{\substack{t_1,t_2\in T \\ |t_1-t_2|\le \frac{1}{\gamma^j(n)} + h_n}} \times$$
$$\times \underset{t\in[t_1,t_2]}{var} L^{jc}(t)dt + C\int_{T\backslash T_n} h_n dt +$$
$$+C\int_{T\backslash T_n} \sum_{j=1}^{b}\sum_{\mu_r \le t} |\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)| \times$$
$$\times(\frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{1}{\gamma^j(n)} + h_n)dt +$$
$$+C\sum_{\mu_r \le t} |\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)|(\sum_{m=b+1}^{q} |\Delta L^m(\mu_r)| \times$$
$$\times(h_n + \frac{1}{\gamma^j(n)}) + aCh_n\sum_{m=1}^{b} |\Delta L^m(\mu_r)| +$$
$$+C\int_{T\backslash T_n} \sum_{j=1}^{q}\sum_{\mu_r \le t} |\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)| \times$$
$$\times(\sum_{m=b+1}^{q} \gamma^m(n)h_n +$$
$$+ \max_{\substack{t_1,t_2\in T \\ |t_1-t_2|\le \frac{1}{\gamma^j(n)} + h_n}} \underset{t\in[t_1,t_2]}{var} L^j(t))dt +$$
$$+\frac{C}{\gamma^{\nu}(n)}.$$

Устремляя $n_0 \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $\gamma^j(n)h_n \to \infty$ для $j = \overline{1,b}$ и $\gamma^j(n)h_n \to 0$ для $j = \overline{b+1,q}$, а затем $\varepsilon \to 0$, получим $\int_T |x_n(t) - x(t)| dt \to 0$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим систему уравнений с обобщенными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}\delta(t)x_1(t) + a_{12}\delta(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}\delta(t)x_1(t) + a_{22}\delta(t)x_2(t), \end{cases} \quad (6)$$

где $a_{ij} \in R$, $\delta(t)$ – функция Дирака и $x(-1) = 1$. Так как $\delta(t) = \dot{H}(t)$, где $H(t) = 1$, при $t \geq 0$ и $H(t) = 0$, при $t < 0$. Тогда из теоремы при $b = 1$ следует, что последовательность решений x_n соответствующего уравнения (3) сходится к решению системы уравнений (4), которая в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + H(t)S^1(x(0-), \Delta H(0)), \\ x_2(t) = 1 + H(t)S^2(x(0-), \Delta H(0)). \end{cases}$$

Так как $S^i(x, u) = \varphi^i(1, x, u) = \varphi^i(0, x, u)$, а $\varphi^i(\tau, x, u)$ находится из системы

$$\begin{cases} \varphi^1(\tau, x, u) = x^1 + u^1 \int\limits_0^\tau a_{11}\varphi^1(s-, x, u)dH(s-1) + u^2 \times \\ \times \int\limits_0^\tau a_{12}\varphi^2(s, x, u)ds, \\ \varphi^2(\tau, x, u) = x^2 + u^1 \int\limits_0^\tau a_{21}\varphi^1(s-, x, u)dH(s-1) + u^2 \times \\ \times \int\limits_0^\tau a_{22}\varphi^2(s, x, u)ds, \end{cases}$$

то найдем $\varphi(\tau, x, u)$ При $\tau < 1$ решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} \varphi^1(\tau, x, u) = x^1 + \dfrac{a_{12}}{a_{22}} x^2(e^{u^2 a_{22}\tau} - 1), \\ \varphi^2(\tau, x, u) = x^2 e^{u^2 a_{22}\tau}. \end{cases}$$

Если $\tau = 1$, имеем

$$\begin{cases} \varphi^1(1, x, u) = x^1 + u^1 a_{11}(x^1 + \dfrac{a_{12}}{a_{22}} \times \\ \times x^2(e^{u^2 a_{22}} - 1)) + \\ + \dfrac{a_{12}}{a_{22}} x^2(e^{u^2 a_{22}} - 1), \\ \varphi^2(1, x, u)(x^2 + u^1 a_{21} x^2 e^{u^2 a_{22}}) + \\ + x^2(e^{u^2 a_{22}} - 1). \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + H(t)(a_{11} + \dfrac{a_{12}}{a_{22}}(e^{a_{22}} - 1)(1 + a_{11})), \\ x_2(t) = 1 + H(t)(a_{21}e^{a_{22}} + e^{a_{22}} - 1). \end{cases}$$

является решением исходной системы уравнений. В работах [7–9] доказано, что при $b = 2$ или $b = 0$ решениями (6) будут следующие функции

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + H(t)(a_{11} + a_{12}), \\ x_2(t) = 1 + H(t)(a_{21} + a_{22}). \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + H(t)\dfrac{1}{\lambda} e^{\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22})t} \times \\ \times(\lambda \operatorname{ch}(\dfrac{1}{2}\lambda t) + (a_{11} - a_{22} + 2a_{12})\operatorname{sh}(\dfrac{1}{2}\lambda t) - 1), \\ x_2(t) = 1 + H(t)\dfrac{1}{\lambda} e^{\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22})t}(\lambda \operatorname{ch}(\dfrac{1}{2}\lambda t) + \\ +(2a_{21} - a_{11} + a_{22})\operatorname{sh}(\dfrac{1}{2}\lambda t) - 1), \end{cases}$$

где $\lambda = \sqrt{4a_{21}a_{12} + (a_{11} - a_{22})^2}$. Непосредственно видно, что решения существенно различны. Последние два получены при использовании других подходов в работах [1–3]. Решение, представленное в данной статье, получено впервые и, вообще говоря, не может быть получено с помощью подходов, описанных в работах [1–3]

Литература

1. *Антосик, П.* Теория обобщенных функций: секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – М. : Мир, 1976. – 311 с.
2. *Das, P. S.* Existence and stability of measure differential equations / P. S. Das, R. R. Sharma // Czech.Math.J. – 1972. – Vol. 22, № 1. – P.145–158
3. *Завалищин, С. Т.* Импульсные процессы: модели и приложения / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин. – М. : Наука, 1991. – 256 с.References

References

1. *Antosik, P.* Teoriya obobshchennyh funkcij: sekvencial'nyj podhod / P. Antosik, Ya. Mikusinskij, R. Sikorskij. – M. : Mir, 1976. – 311 s.
2. *Das, P. S.* Existence and stability of measure differential equations / P. S. Das, R. R. Sharma // Czech.Math.J. – 1972. – Vol. 22, № 1. – P.145–158
3. *Zavalishchin, S. T.* Impul'snye processy: modeli i prilozheniya / S. T. Zavalishchin, A. N. Sesekin. – M. : Nauka, 1991. – 256 s.References

4. *Лазакович, Н. В.* Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н. В. Лазакович // Докл. НАН Беларуси. – 1994. – Т. 38. – № 5. – С. 23–27.
5. *Yablonski, A.* Differential equations with generalized coefficients / A. Yablonski // Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.
6. *Groh, J.* A nonlinear Volterra-Stieltjes integral equation and a Gronwall inequality in one dimension / J. Groh // Illionois J. Math. – 1980. – V. 24 (2). – P. 244–263.
7. *Жук, А. И.* Системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Известия НАН Беларуси. Сер. физ. мат. наук. – 2011. – № 1. – С. 12–16.
8. *Жук, А. И.* Системы квазидифференциальных уравнений в прямом произведении алгебр мнемофункций. Симметрический случай / А. И. Жук, А. К. Хмызов // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1. – 2010. – № 2. – С. 87–93.
9. *Жук, А. И.* Неавтономные системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Труды института математики. – 2011. – Т. 19. № 2. – С. 43–51.

4. *Lazakovich, N. V.* Stohasticheskie differencialy v algebre obobshchennyh sluchajnyh processov / N. V. Lazakovich // Dokl. NAN Belarusi. – 1994. – T. 38. – № 5. – S. 23–27.
5. *Yablonski, A.* Differential equations with generalized coefficients / A. Yablonski // Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.
6. *Groh, J.* A nonlinear Volterra-Stieltjes integral equation and a Gronwall inequality in one dimension / J. Groh // Illionois J. Math. – 1980. – V. 24 (2). – P. 244–263.
7. *Zhuk, A.* I. Sistemy differencial'nyh uravnenij v algebre obobshchennyh funkcij / A. I. Zhuk, O. L. Yablonskij // Izvestiya NAN Belarusi. Ser. fiz. mat. nauk. – 2011. – № 1. – S. 12–16.
8. *Zhuk, A. I.* Sistemy kvazidifferencial'nyh uravnenij v pryamom proizvedenii algebr mnemofunkcij. Simmetricheskij sluchaj / A. I. Zhuk, A. K. Hmyzov // Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. 1. – 2010. – № 2. – S. 87–93.
9. *Zhuk, A. I.* Neavtonomnye sistemy differencial'nyh uravnenij v algebre obobshchennyh funkcij / A. I. Zhuk, O. L. Yablonskij // Trudy instituta matematiki. – 2011. – T. 19. № 2. – S. 43–51.